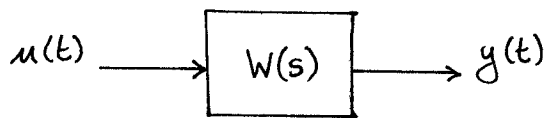


ESERCIZIO

1

Dato il sistema a tempo continuo in figura:



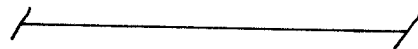
descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

calcolare la risposta forzata del sistema corrispondente all'ingresso:

$$u(t) = \mathbb{1}(t)$$

dove $\mathbb{1}(t)$ è la funzione gradino unitario.



La trasformata di Laplace dell'ingresso è:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

La trasformata di Laplace dell'uscita è:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{s^3 + s^2 + 4s + 4} \cdot \frac{1}{s}$$

Scomponiamo il denominatore di $Y(s)$ in fattori elementari:

$$p(s) = s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Δ i divisori di 4 sono $\pm 1, \pm 2$ e ± 4 .

$$p(1) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10 \neq 0$$

$$p(-1) = -1 + 1 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow s = -1 \text{ è radice di } p(s)$$

Applicando la Regola di Ruffini:

	1	1	4	4
-1		-1	0	-4
	1	0	4	//

$$\Rightarrow p(s) = (s+1)(s^2+4)$$

non è ulteriormente scomponibile perché
ha radici complesse

Dunque:

$$Y(s) = \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{s(s+1)(s^2+4)} \quad (*)$$

Scomponiamo $Y(s)$ in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Calcoliamo le costanti A e B :

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{8}{4} = 2$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) Y(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{s(s^2+4)} = \frac{2+1-6+8}{(-1)(1+4)} = \frac{5}{-5} = -1$$

Per il calcolo di C e D ci sono due possibilità:

1° METODO - uguaglianza dei polinomi

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{s+2}{s(s+1)} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \\ &= \frac{(s+2)(s^2+4) + s(s+1)(Cs+D)}{s(s+1)(s^2+4)} = \\ &= \frac{s^3 + 4s + 2s^2 + 8 + Cs^3 + (C+D)s^2 + Ds}{s(s+1)(s^2+4)} = \\ &= \frac{(C+1)s^3 + (C+D+2)s^2 + (D+4)s + 8}{s(s+1)(s^2+4)} \quad (**) \end{aligned}$$

Uguagliando i polinomi a numeratore in $(*)$ e $(**)$ si ottengono le condizioni:

$$\begin{cases} C+1 = -2 & \Rightarrow C = -3 \\ C+D+2 = 1 \\ D+4 = 6 & \Rightarrow D = 2 \\ 8 = 8 & \text{verificata!} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \diagdown \\ -3+2+2 = 1 \text{ verificata!} \\ \diagup \end{array}$$

2° METODO - calcolo dei residui

$$\frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{\alpha}{s-2j} + \frac{\alpha^*}{s+2j} = \frac{\overbrace{(\alpha+\alpha^*)}^{2\operatorname{Re}(\alpha)} s + 2 \overbrace{(\alpha-\alpha^*)}^{2j\operatorname{Im}(\alpha)} j}{s^2+4} =$$

$$= \frac{2\operatorname{Re}(\alpha)s - 4\operatorname{Im}(\alpha)}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} C &= 2\operatorname{Re}(\alpha) \\ D &= -4\operatorname{Im}(\alpha) \end{aligned}}$$

dove:

$$\alpha = \lim_{s \rightarrow 2j} (s-2j)Y(s) = \lim_{s \rightarrow 2j} \frac{-2s^3 + s^2 + 6s + 8}{s(s+1)(s+2j)} =$$

$$= \frac{16j - 4 + 12j + 8}{2j(1+2j)4j} = \frac{4+28j}{-8(1+2j)} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{(4+28j)(1-2j)}{-8 \cdot 5} =$$

$$= \frac{4 - 8j + 28j + 56}{-40} =$$

$$= \frac{60 + 20j}{-40} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(\alpha) = -\frac{3}{2} \\ \operatorname{Im}(\alpha) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

↓
razionalizziamo...

Da cui:

$$C = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

$$D = -4 \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$



In conclusione:

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{-3s+2}{s^2+4} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - 3 \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

trasformati di $1(t)$ trasformati di e^{-t} trasformati di $\cos(2t)$ trasformati di $\sin(2t)$

Antitrasformando:

$$y(t) = [2 - e^{-t} - 3 \cos(2t) + \sin(2t)] 1(t)$$

NOTA- Dato che l'ingresso è nullo per $t < 0$,
 anche la risposta è nulla per $t < 0$.
 Moltiplicare per $1(t)$ corrisponde
 dunque a scrivere:

$$y(t) = \begin{cases} 2 - e^{-t} - 3 \cos(2t) + \sin(2t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$