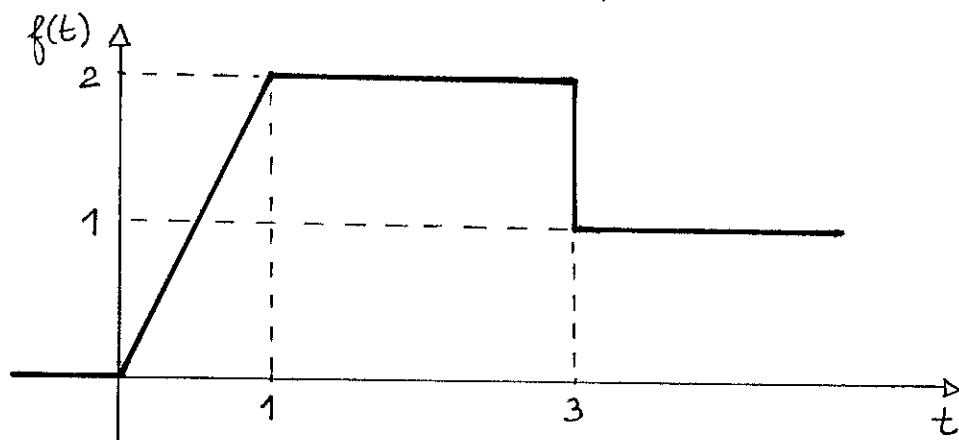


- ① Calcolare la trasformata di Laplace della funzione in figura.



La funzione $f(t)$ ha l'espressione:

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq t < 3 \\ 1 & \text{se } t \geq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che può essere riscritta nella forma compatta:

$$f(t) = 2 \delta_{-2}(t) - 2 \delta_{-2}(t-1) - \delta_{-1}(t-3)$$

dove $\delta_{-1}(t)$ è la funzione gradino unitario, e $\delta_{-2}(t)$ è la funzione rampa lineare.

Dunque:

$$F(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s} e^{-3s} = \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s}) - \frac{1}{s} e^{-3s}$$

- ② Antitrasformare la funzione razionale $Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$

1° metodo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s-i)(s+i)} = \frac{1}{(s-p_1)^{q_1}(s-p_2)^{q_2}(s-p_2^*)^{q_2}}$$

dove:

$$p_1 = 1 \quad \text{con } q_1 = 1$$

$$p_2 = i \quad \text{con } q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = 0, \omega_2 = 1$$

Dunque:

(2)

$$Y(s) = \frac{R_{1,1}}{s-1} + \frac{R_{2,1}}{s-i} + \frac{R_{2,1}^*}{s+i}$$

con:

$$R_{1,1} = \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1)Y(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s/1) \frac{1}{(s/1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}$$

$$R_{2,1} = \lim_{s \rightarrow p_2} (s-p_2)Y(s) = \lim_{s \rightarrow i} (s/i) \frac{1}{(s-1)(s/i)(s+i)} = \frac{1}{2i(i-1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+i} \left(\frac{1-i}{1-i} \right) = -\frac{1}{4}(1-i)$$

per razionalizzare

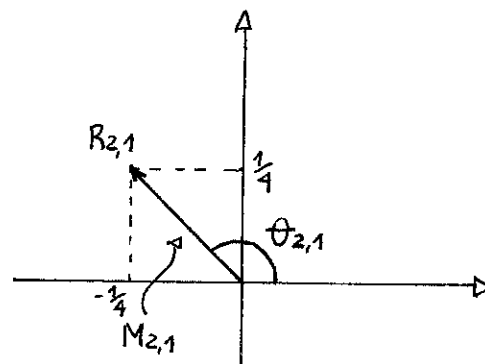
modulo e fase di $R_{2,1}$

$$M_{2,1} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\theta_{2,1} = \arccos\left(\frac{\text{parte reale}}{\text{modulo}}\right) = \arccos\left(\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

anche graficamente, perché $R_{2,1}$ sta sulla bisettrice del 2° quadrante.



Applicando la formula:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left[R_{1,1} e^t + 2 M_{2,1} \cos(t + \theta_{2,1}) \right] \mathbb{1}(t) =$$
$$= \left[\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right) \right] \mathbb{1}(t)$$

2° metodo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

A è proprio il residuo in $p_1=1$:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)Y(s) = \frac{1}{2}$$

3

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} + Bs^2 + Cs - Bs - C}{(s-1)(s^2+1)} \\ &= \frac{(B+\frac{1}{2})s^2 + (-B+C)s + (-C+\frac{1}{2})}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Per l'uguaglianza dei polinomi a numeratore:

$$\begin{cases} B + \frac{1}{2} = 0 \\ -B + C = 0 \\ -C + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = C = -\frac{1}{2} \quad \text{ok (verifica)}$$

NOTA - e' un sistema con piu' equazioni che incognite; una equazione e' ridondante

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left[\frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \right] \mathbb{1}(t)$$

—————

NOTA - Con il 1° metodo abbiamo ottenuto:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) \right] \mathbb{1}(t)$$

mentre con il 2° metodo:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \sin(t) \right] \mathbb{1}(t)$$

Ovviamente, le due espressioni sono equivalenti!

$$\text{Infatti, } \cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos(t) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin(t) \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t).$$

③ Antitrasformare la funzione razionale $Y(s) = \frac{-s^2 - 3s + 7}{(s-1)^2(s+2)}$

④

Scomponendo $Y(s)$ in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$$

dove:

$$A = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \cancel{(s-1)}^2 \frac{-s^2 - 3s + 7}{\cancel{(s-1)}^2 (s+2)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[(s-1)^2 Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[\frac{-s^2 - 3s + 7}{s+2} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(-2s-3)(s+2) - (-s^2 - 3s + 7)}{(s+2)^2} = -\frac{18}{9} = -2 \end{aligned}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) Y(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \cancel{(s+2)} \frac{-s^2 - 3s + 7}{(s-1)^2 \cancel{(s+2)}} = \frac{9}{9} = 1$$

abbiamo:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - 2 \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

e antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = [t e^t - 2 e^t + e^{-2t}] \mathbb{1}(t) = [(t-2) e^t + e^{-2t}] \mathbb{1}(t)$$