Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico riportato in Figura 1, dove m_1 e m_2 sono le masse dei carrelli, z_1 e z_2 sono le rispettive posizioni, k_1 e k_2 sono i coefficienti elastici delle molle, e β è un coefficiente d'attrito viscoso. Siano inoltre u_1 e u_2 le forze esterne agenti rispettivamente sulle masse m_1 e m_2.

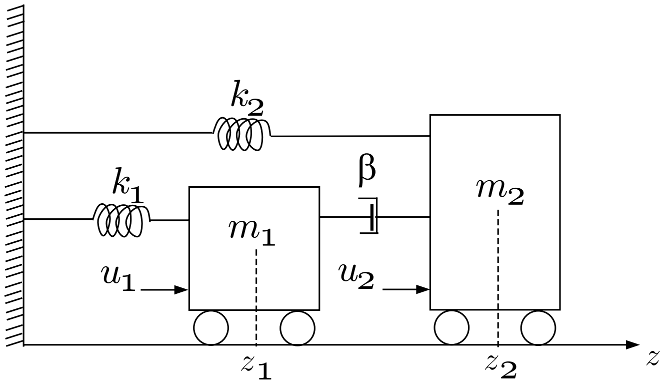


Figura 1

Si scriva un modello del sistema in forma di stato, considerando come uscite la posizione del centro di massa del sistema, e la velocità della massa m_2.

Soluzione

Si scrive il Secondo Principio della Dinamica per entrambe le masse:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 &= -k_1 z_1 + \beta(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + u_1 \\ m_2\ddot{z}_2 &= -k_2 z_2 - \beta(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + u_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Le (1), riscritte in forma normale, diventano:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\tfrac{k_1}{m_1} z_1 - \tfrac{\beta}{m_1}\dot{z}_1 + \tfrac{\beta}{m_1}\dot{z}_2 + \tfrac{1}{m_1}u_1 \\ \ddot{z}_2 &= \tfrac{\beta}{m_2}\dot{z}_1 - \tfrac{k_2}{m_2} z_2 - \tfrac{\beta}{m_2}\dot{z}_2 + \tfrac{1}{m_2}u_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Si vuole trovare una rappresentazione del sistema in forma di stato del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}} &= A\,\mathrm{x} + B\,\mathrm{u} \\ \mathrm{y} &= C\,\mathrm{x} + D\,\mathrm{u} \end{aligned} \tag{3}$$

dove $\mathrm{u} = [\ u_1\ u_2\ ]^T$, $\mathrm{y} = [\ y_1\ y_2\ ]^T$ con:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} && \text{(posizione del centro di massa)} \\ y_2 &= \dot{z}_2 && \text{(velocità della massa } m_2\text{)} \end{aligned} \tag{4}$$

e lo stato x deve essere definito in maniera opportuna. Si ponga:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(ossia, nello stato x si mettano posizione e velocità di entrambe le masse).

Utilizzando la (5) e le (2) si ha:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z}_1 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{\beta}{m_1} x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{\beta}{m_1} x_4 + \frac{1}{m_1} u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{z}_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_4 = \ddot{z}_2 = 0 \cdot x_1 + \frac{\beta}{m_2} x_2 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{\beta}{m_2} x_4 + 0 \cdot u_1 + \frac{1}{m_2} u_2 \end{array} \tag{6}$$

da cui si ottengono le matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & 0 & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Per quanto riguarda l'equazione di uscita, utilizzando le (4) si ha:

$$\begin{array}{l} y_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2} x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \end{array} \tag{8}$$

da cui si ottengono le matrici C e D:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & 0 & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema autonomo a tempo discreto ($\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) \triangleq A\,\mathrm{x}(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) \triangleq C\,\mathrm{x}(k) \end{aligned}$$

1. Elencare i modi del sistema.

2. Si calcoli la risposta libera $y(k) = CA^k\mathrm{x}_0$ con condizione iniziale $\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$. Si calcoli inoltre il limite $\lim_{k\to\infty} y(k)$, se esiste.

Soluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\, I - A) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda^2 + 4) \tag{10}$$

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2\jmath$, e $\lambda_3 = \lambda_2^* = -2\jmath$. La matrice A ha tutti autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Tuttavia, dato che λ_2 e λ_3 sono complessi, la forma diagonale di A non è reale. Si cerca quindi una forma diagonale reale a blocchi di A. Operando una riduzione a scala della matrice $A - \lambda_1\, I$, si ottiene:

$$A - \lambda_1\, I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Il corrispondente sistema lineare omogeneo con equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ha soluzioni (*Attenzione!* Il sistema è in tre incognite, anche se x_3 non compare nelle equazioni):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned} \tag{13}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario. Dunque, scegliendo $\alpha = 1$:

$$\ker(A - \lambda_1\, I) = \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{v}_1} \Big\} \tag{14}$$

Analogamente, operando una riduzione a scala della matrice $A - \lambda_2 I$, si ottiene:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -2\jmath & 2 & 0 \\ -2 & -2\jmath & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2\jmath \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \jmath & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Il corrispondente sistema lineare omogeneo con equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 + \jmath\, x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

ha soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha\jmath \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \end{aligned} \tag{17}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ parametro arbitrario. Dunque, scegliendo $\alpha = \jmath$:

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \jmath \\ \jmath \end{bmatrix}}_{\mathrm{v}_2} \Big\} \tag{18}$$

Si scomponga v_2 nelle sue parti reale e immaginaria:

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_2^{(1)} + \jmath\, \mathrm{v}_2^{(2)} \quad \text{dove} \quad \mathrm{v}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{v}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Costruendo la seguente matrice di cambio di coordinate nello spazio di stato:

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2^{(1)} & \mathrm{v}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

e scrivendo $\lambda_2 = \sigma_2 + \jmath\, \omega_2$ con $\sigma_2 = 0$ e $\omega_2 = 2$, risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

Dunque, scrivendo ancora $\lambda_2 = M_2\, e^{\jmath\, \theta_2}$ con $M_2 = 2$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_2^k \cos(k\theta_2) & M_2^k \sin(k\theta_2) \\ 0 & -M_2^k \sin(k\theta_2) & M_2^k \cos(k\theta_2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} (\frac{1}{2})^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) \\ 0 & -2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) \end{array}\right] \tag{22}$$

I modi del sistema sono tutte le funzioni che compaiono in $\tilde{A}^k$, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad 2^k \cos(k\frac{\pi}{2})\,, \quad 2^k \sin(k\frac{\pi}{2})$$

Per il calcolo della risposta libera, si ha:

$$y(k) = CA^k \mathrm{x}_0 = CT\tilde{A}^k T^{-1}\mathrm{x}_0 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{23}$$

Per evitare il calcolo di T^{-1} in (23), il prodotto $T^{-1}\mathrm{x}_0$ può essere ricavato direttamente esprimendo x_0 come combinazione lineare dei vettori v_1, $\mathrm{v}_2^{(1)}$ e $\mathrm{v}_2^{(2)}$:

$$\mathrm{x}_0 = \alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2^{(1)} + \alpha_3 \mathrm{v}_2^{(2)} \tag{24}$$

Il sistema lineare risultante:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 2 \end{aligned} \tag{25}$$

ha soluzione $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dunque:

$$T^{-1}\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Infine:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0 \tag{27}$$

Esercizio 3

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

determinare i punti di equilibrio quando $u(t) = -1$ e discuterne la stabilità. Per ciascun punto di equilibrio, riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato.

Soluzione

Il sistema è nella forma:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = f(\mathrm{x}(t), u(t)) \tag{28}$$

dove:

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + u \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, si risolve il sistema:

$$0 = f(\mathrm{x}, u) \tag{30}$$

cioè:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + u &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

con $u \triangleq u_{eq} = -1$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Sostituendo $x_1 = -x_2$, ottenuto dalla seconda equazione, nella prima equazione, si trova:

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

che ha soluzioni $x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi $x_1 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. I punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, sono:

$$\mathrm{x}_{eq,1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x}_{eq,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Calcolando le matrici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

e valutandole nei punti $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$ e $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$, si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha:

$$A_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio, essendo il sistema a tempo continuo, si studia il *segno* della parte reale degli autovalori dei sistemi linearizzati. Il polinomio caratteristico della matrice $A_{lin,1}$ è:

$$p_1(\lambda) = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - 1) - \sqrt{2} = \lambda^2 + (\sqrt{2} - 1)\lambda - 2\sqrt{2} \tag{36}$$

Il polinomio $p_1(\lambda)$ ha coefficienti di segno discorde, e quindi ha almeno una radice con parte reale positiva. Il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$ risulta *instabile*. Il polinomio caratteristico della matrice $A_{lin,2}$ è:

$$p_2(\lambda) = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda - 1) + \sqrt{2} = \lambda^2 - (\sqrt{2} + 1)\lambda + 2\sqrt{2} \tag{37}$$

Il polinomio $p_2(\lambda)$ ha coefficienti di segno discorde, e quindi ha almeno una radice con parte reale positiva. Il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$ risulta *instabile*.

Esercizio 4

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura, dove M è la massa del carrello, k_1 e k_2 sono i coefficienti elastici delle molle, β è il coefficiente di attrito delle ruote con il terreno, e u è una forza esterna. La posizione del carrello è indicata con y. Le molle sono fissate a distanza L_1 e L_2, rispettivamente, dall'origine del sistema di riferimento.

1. Scrivere l'equazione dinamica del sistema. *Suggerimento.* L'allungamento della molla k_1 è $L_1 + y$, mentre l'allungamento della molla k_2 è $L_2 - y$. La forza di attrito è proporzionale alla velocità $\dot{y}$ del carrello.

2. Scrivere un modello del sistema nella forma di spazio di stato

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + F\ ,$$

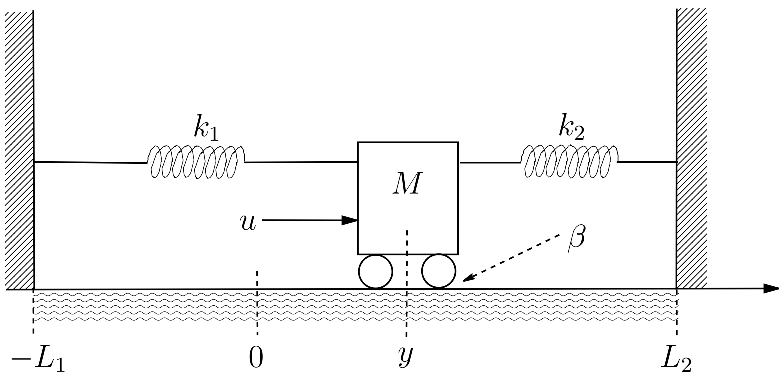
   dove $x(t) = [\ y(t)\ \dot{y}(t)\ ]^T$, e il vettore F tiene conto di eventuali termini di forzamento costanti.

3. E' il sistema asintoticamente stabile per tutti i valori k_1, k_2, β, $M > 0$?

Si considerino i seguenti valori per i parametri del sistema: $M = 2$ Kg, $k_1 = 3$ N/m, $k_2 = 7$ N/m, $\beta = 4$ Ns/m.

4. Elencare i modi del sistema.

5. Ponendo $u = k_1 L_1 - k_2 L_2$, determinare l'evoluzione $y(t)$ della posizione del carrello a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [\ 1\ \ -1]^T$.



Soluzione

Domanda 1.

L'equazione dinamica del sistema è

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -k_1(L_1+y)+k_2(L_2-y)-\beta\dot{y}+u \\ &= -(k_1+k_2)\,y-\beta\dot{y}+u+(k_2L_2-k_1L_1) \end{aligned}$$

Domanda 2.

Definendo

$$x=\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c} y \\ \dot{y} \end{array}\right]$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x_1}=\dot{y} &= x_2 \\ \dot{x_2}=\ddot{y} &= -\frac{k_1+k_2}{M}\,y-\frac{\beta}{M}\,\dot{y}+\frac{1}{M}\,u+\frac{k_2L_2-k_1L_1}{M} \\ &= -\frac{k_1+k_2}{M}\,x_1-\frac{\beta}{M}\,x_2+\frac{1}{M}\,u+\frac{k_2L_2-k_1L_1}{M} \end{aligned}$$

da cui si ottiene un modello del sistema nella forma di spazio di stato

$$\dot{x}(t)=A\,x(t)+B\,u(t)+F$$

ponendo

$$A=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{M} & -\dfrac{\beta}{M} \end{array}\right] \quad , \quad B=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{array}\right] \quad , \quad F=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \dfrac{1}{M}(k_2L_2-k_1L_1) \end{array}\right]$$

Domanda 3.

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda)=\lambda^2+\frac{\beta}{M}\,\lambda+\frac{k_1+k_2}{M}$$

Dato che *condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio di secondo grado abbia tutte le radici con parte reale negativa, è che tutti i suoi coefficienti siano di segno concorde*, il sistema è asintoticamente stabile per tutti i valori k_1, k_2, β, $M>0$.

Domanda 4.

Sostituendo i valori dei coefficienti, si ottiene

$$A=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{array}\right]$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -1 + 2\jmath$ e $\lambda_2 = \lambda_1^* = -1 - 2\jmath$ (radici di $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 5$).

Posto $\lambda_1 = \sigma + \jmath\omega$, con $\sigma = -1$ e $\omega = 2$, è noto *dalla teoria* che esiste un cambiamento di coordinate T tale che

$$\tilde{A} = T^{-1} A\, T = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Risultando

$$e^{\tilde{A}\,t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma\,t}\cos(\omega\,t) & e^{\sigma\,t}\sin(\omega\,t) \\ -e^{\sigma\,t}\sin(\omega\,t) & e^{\sigma\,t}\cos(\omega\,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2\,t) & e^{-t}\sin(2\,t) \\ -e^{-t}\sin(2\,t) & e^{-t}\cos(2\,t) \end{bmatrix}$$

i modi del sistema sono $e^{-t}\cos(2\,t)$ e $e^{-t}\sin(2\,t)$.

<u>*Domanda 5.*</u>

Ponendo $u = k_1\,L_1 - k_2\,L_2$, l'equazione del sistema diventa

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)$$

per cui l'evoluzione dello stato (con condizione iniziale x_0) è $x(t) = e^{A\,t}x_0$, e l'evoluzione $y(t)$ della posizione del carrello è

$$y(t) = C\,x(t) = C\,e^{A\,t}x_0$$

dove $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice $e^{A\,t}$ è calcolabile attraverso la relazione

$$e^{A\,t} = T\,e^{\tilde{A}t}\,T^{-1}$$

Per il calcolo della matrice di cambiamento di coordinate T, si procede calcolando un autovettore relativo all'autovalore λ_1, cioè un vettore $v \neq 0$ tale che $(A - \lambda_1\,I)v = 0$. Dato che le due righe della matrice

$$A - \lambda_1\,I = \begin{bmatrix} 1 - 2\jmath & 1 \\ -5 & -1 - 2\jmath \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, consideriamo solo la prima equazione:

$$(1 - 2\jmath)v_1 + v_2 = 0$$

Posto arbitrariamente $v_1 = 1 + 2\jmath$, risulta $v_2 = -5$. Da cui

$$v = \begin{bmatrix} 1 + 2\jmath \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \jmath \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq w_1 + \jmath w_2$$

e

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C\,e^{A\,t}x_0 = C\,T\,e^{\tilde{A}t}\,T^{-1}\,x_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} e^{\tilde{A}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \\
&= \frac{e^{-t}}{5} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) - 2\,\sin(2\,t) & \sin(2\,t) + 2\,\cos(2\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= e^{-t}\cos(2\,t)
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Dato il sistema nonlineare a tempo discreto:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k+1) = x_1(k)\left[x_2^2(k) - \alpha\right] + u^2(k) - 2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2(k)-1} - 1\right) \end{array} \right. \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = \sqrt{2}$, $\forall k$.
2. Discutere la stabilità di $x_{eq1} = [\ 0\ 1\ ]^T$ e $x_{eq2} = [\ 0\ \ -1\ ]^T$ al variare del parametro α, riportando le matrici A_{lin} e B_{lin} dei sistemi linearizzati.

Soluzione

Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1\left(x_2^2 - \alpha\right) + u^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) \end{bmatrix}$$

Domanda 1.

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = \sqrt{2}$, si deve risolvere l'equazione

$$x = f(x,u)$$

cioè

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1\left(x_2^2 - \alpha\right) + u^2 - 2 \\ x_2 = x_1 + x_2 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) \end{array} \right.$$

con $u \triangleq u_{eq} = \sqrt{2}$. Si ha dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1\left(x_2^2 - 1 - \alpha\right) = 0 \\ x_1 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) = 0 \end{array} \right.$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$, e (se $\alpha \geq -1$) $x_2^2 = 1 + \alpha$.

Se $x_1 = 0$, la seconda equazione diventa

$$e^{x_2^2-1} - 1 = 0$$

che ha soluzione $x_2^2 - 1 = 0$, e quindi $x_2 = \pm 1$. Due punti di equilibrio del sistema sono

$$x_{eq1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se $x_2^2 = 1+\alpha$, la seconda equazione diventa

$$x_1 + \frac{1}{4}\left(e^{\alpha} - 1\right) = 0$$

che ha soluzione $x_1 = \dfrac{1}{4}\left(1 - e^{\alpha}\right)$. Altri due punti di equilibrio del sistema sono dunque

$$x_{eq3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{\alpha}\right) \\ \sqrt{1+\alpha} \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{\alpha}\right) \\ -\sqrt{1+\alpha} \end{bmatrix} \quad (\alpha \geq -1)$$

<u>*Domanda 2.*</u>

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} x_2^2 - \alpha & 2x_1x_2 \\ 1 & 1 + \frac{1}{2}\, x_2\, e^{x_2^2-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \end{bmatrix}$$

e valutandole in (x_{eq1}, u_{eq}) e (x_{eq2}, u_{eq}), si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha

$$A_{lin1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin1} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A_{lin1} sono $1-\alpha$ e $\dfrac{3}{2}$. In particolare, dato che $\left|\dfrac{3}{2}\right| > 1$, si conclude che il punto di equilibrio x_{eq1} è sempre *instabile* al variare di α.

Gli autovalori della matrice A_{lin2} sono $1-\alpha$ e $\dfrac{1}{2}$. Dato che $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, occorre discutere $|1-\alpha|$:

$$|1-\alpha| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1-\alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 2$$

Si conclude che il punto di equilibrio x_{eq2} è *asintoticamente stabile* per $0 < \alpha < 2$, e *instabile* per $\alpha < 0$ e $\alpha > 2$. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 2$, non si può dire niente sulla stabilità di x_{eq2} utilizzando il metodo del sistema linearizzato.

Esercizio 6

Calcolare la risposta libera quando la condizione iniziale è $x_0 = [111]^{\mathrm{T}}$ per il sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Soluzione

Si deve calcolare

$$x(k) = A^k \, x_0$$

Per il calcolo di A^k, si procede trovando gli autovalori della matrice A. Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) \triangleq \det(\lambda \, I - A) = \lambda(\lambda - 2)^2$$

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 1$, e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica $\nu_2 = 2$.

La matrice A è *diagonalizzabile* se e solo se, per ciascun autovalore λ_i, molteplicità algebrica ν_i e molteplicità geometrica μ_i coincidono. Si ricordi che la molteplicità geometrica di un autovalore λ_i è la dimensione di $\ker(A - \lambda_i \, I)$. Per l'autovalore λ_1, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_1 \, I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta $\mu_1 = n -$ rango$(A - \lambda_1 \, I) = 3 - 2 = 1$. Per il calcolo di una base di $\ker(A - \lambda_1 \, I)$, si trova una soluzione v_1 non nulla del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ \quad -2\,x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Posto arbitrariamente $x_3 = 2$, risulta $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$. Da cui $v_1 = [\ 1\ 1\ 2\ ]^T$. Per l'autovalore λ_2, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_2 \, I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta $\mu_2 = n -$ rango$(A - \lambda_2 \, I) = 3 - 1 = 2$. Per il calcolo di una base di $\ker(A - \lambda_2 \, I)$, si trovano due soluzioni v_2 e v_3 linearmente indipendenti del sistema

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Posto arbitrariamente $x_3 = 1$ e $x_2 = -1$, risulta $x_1 = 0$. Da cui $v_2 = [\ 0\ \ -1\ 1\ ]^T$. Inoltre, posto $x_3 = 0$ e $x_2 = 1$, risulta $x_1 = 1$. Da cui $v_3 = [\ 1\ 1\ 0\ ]^T$.

Dato che $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$, la matrice A è diagonalizzabile. Una forma diagonale di A è

$$\Lambda = T^{-1} A\, T = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

dove

$$T = \left[\ v_1 \quad v_2 \quad v_3\ \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

La matrice A^k è ora calcolabile attraverso la relazione

$$A^k = T\,\Lambda^k\, T^{-1}$$

dove

$$\Lambda^k = \left[\begin{array}{c|cc} 0^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{array}\right] \qquad \textbf{Nota:} \quad 0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Risulta

$$x(k) = A^k\, x_0 = T\,\Lambda^k\, T^{-1}\, x_0 = \frac{1}{2}\, T\,\Lambda^k \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\, T \left[\begin{array}{c} 0^k \\ 0 \\ 2^k \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} 0^k + 2^k \\ 0^k + 2^k \\ 2 \cdot 0^k \end{array}\right]$$

Esercizio 7

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + 2x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - u(t) \end{cases}$$

determinare i punti di equilibrio quando $u(t) = 0$ e discutere la stabilità dei punti di equilibrio, riportando le matrici A_{lin} e B_{lin} del sistema linearizzato.

Soluzione

Il sistema è nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2\,x_2^2 \\ x_1 + x_2 - u \end{bmatrix}$$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, si risolve il sistema

$$0 = f(x,u)$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 + 2\,x_2^2 \\ 0 = x_1 + x_2 - u \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1^2 + 2\,x_2^2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione $x_2 = -x_1$. Sostituendo nella prima equazione:

$$x_1^2 + 2\,(-x_1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,x_1^2 = 0$$

che ha soluzione $x_1 = 0$, e quindi $x_2 = 0$. L'unico punto di equilibrio del sistema è

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} 2\,x_1 & 4\,x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e valutandole in (x_{eq}, u_{eq}), si ottengono le matrici del sistema linearizzato richieste. Si ha

$$A_{lin} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A_{lin} sono 0 e 1. In particolare, dato che esiste un autovalore di A_{lin} con parte reale positiva, si conclude che il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è *instabile*.

Esercizio 8

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo ($x \in \mathbb{R}^3$)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3+k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \triangleq C\,x(t)
\end{aligned}
$$

nel quale k è un parametro reale.

1. Studiare la stabilità e i modi propri del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
2. Assumendo ingresso nullo, determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ e per quali condizioni iniziali $x_0 = [\ \alpha\ \beta\ \gamma\ ]^T$ si hanno soluzioni periodiche (non identicamente nulle) in uscita.

Soluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) \triangleq \det(\lambda\,I - A) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\,k\,\lambda + k^2 + 1)$$

Gli autovalori del sistema sono dunque

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = k + \jmath \\ \lambda_3 = \lambda_2^* = k - \jmath \end{cases}$$

Dallo studio del segno della parte reale degli autovalori, risulta che il sistema è

- *asintoticamente stabile* se $k < 0$;
- *stabile* se $k = 0$;
- *instabile* se $k > 0$.

I modi propri del sistema sono $e^{-2\,t}$ (relativo all'autovalore reale λ_1), $e^{k\,t}\cos(t)$ e $e^{k\,t}\sin(t)$ (relativi agli autovalori complessi e coniugati λ_2 e λ_3).

<u>*Domanda 2.*</u>

Il sistema ha modi periodici se $k = 0$. Per tale valore di k risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori del sistema sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = \jmath \\ \lambda_3 = \lambda_2^* = -\jmath \end{cases}$$

L'uscita $y(t)$ in funzione della generica condizione iniziale x_0 è data dall'espressione

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_0 = C\,(T\, e^{\tilde{A}t}\, T^{-1})\, x_0 = (C\, T)\, e^{\tilde{A}t}\, (T^{-1}\, x_0)$$

Calcoliamo la matrice di cambio di coordinate T.

Per l'autovalore λ_1, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nelle incognite x_1, x_2 e x_3 (si osservi che x_2 non compare esplicitamente nelle equazioni), dal quale ponendo arbitrariamente $x_2 = 1$ si ottiene l'autovettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per l'autovalore λ_2, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -\jmath & 0 & -1 \\ -1 & -2-\jmath & 3 \\ 1 & 0 & -\jmath \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\jmath \\ 0 & -(2+\jmath) & 3-\jmath \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} x_1 - \jmath\, x_3 &= 0 \\ -(2+\jmath)\, x_2 + (3-\jmath)\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nelle incognite x_1, x_2 e x_3, dal quale ponendo arbitrariamente $x_3 = 2 + \jmath$ si ottiene $x_2 = 3 - \jmath$ e $x_1 = -1 + 2\jmath$, e infine l'autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1+2\jmath \\ 3-\jmath \\ 2+\jmath \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2^{(1)}} + \jmath \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2^{(2)}}$$

La matrice T è data da

$$T = \left[\begin{array}{c|cc} v_1 & v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e ad essa corrisponde la matrice

$$\tilde{A} = T^{-1}\,A\,T = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

per la quale

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{-2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{array}\right]$$

Inoltre

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} y(t) &= (C\,T)\,e^{\tilde{A}t}\,(T^{-1}\,x_0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} e^{-2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\frac{1}{5}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\gamma \\ \frac{2}{5}\,\alpha + \frac{1}{5}\,\gamma \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{5}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\gamma\right)[-3\cos(t) - \sin(t)] + \left(\frac{2}{5}\,\alpha + \frac{1}{5}\,\gamma\right)[-3\sin(t) + \cos(t)] \\ &= (\alpha - \gamma)\cos(t) - (\alpha + \gamma)\sin(t) \end{aligned}$$

L'uscita $y(t)$ è periodica e non identicamente nulla a meno che

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0\,, \end{cases}$$

cioè $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$. Dunque il sistema ha soluzioni periodiche non identicamente nulle in uscita per $k = 0$ e per ogni condizione iniziale x_0 tale che $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$.

Esercizio 9

Dato il sistema nonlineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\ln x_2(k) + e^{u(k)} - 1 \\ x_2(k+1) = (1-e)\,x_1(k) + [x_2(k)-1][x_2(k) - \dfrac{1}{2}\,u^2(k) + \alpha] + x_2(k) \end{cases}$$

nel quale α è un parametro reale:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, $\forall k$.

2. Per ciascun punto di equilibrio determinato al punto 1, riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato ($\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{x}(k+1) = A_{lin}\,\tilde{x}(k) + B_{lin}\,\tilde{u}(k)$$

3. Discutere la stabilità del punto di equilibrio $x_{eq1} = [\ 0\ 1\ ]^T$ al variare del parametro α; discutere inoltre la stabilità degli altri punti di equilibrio per $\alpha = -e$.

Soluzione

<u>*Domanda 1.*</u>
Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1 \ln x_2 + e^u - 1 \\ (1-e)x_1 + (x_2-1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) + x_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché il logaritmo sia definito, deve risultare $x_2 > 0$. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, si risolve il sistema

$$x = f(x,u)$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \ln x_2 + e^u - 1 \\ x_2 = (1-e)x_1 + (x_2-1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) + x_2 \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1(\ln x_2 - 1) = 0 \\ (e-1)x_1 = (x_2-1)(x_2+\alpha) \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = e$.

$\boxed{x_1 = 0}$

Sostituendo $x_1 = 0$ nella seconda equazione, si ha

$$(x_2 - 1)(x_2 + \alpha) = 0$$

che ha soluzioni $x_2 = 1$ e $x_2 = -\alpha$. Dato che deve essere $x_2 > 0$ affinché il logaritmo sia definito, la seconda soluzione esiste per $\alpha < 0$. I punti

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

sono dunque punti di equilibrio del sistema.

$\boxed{x_2 = e}$

Sostituendo $x_e = e$ nella seconda equazione, si ha

$$(e-1)x_1 = (e-1)(e+\alpha)$$

che ha soluzione $x_1 = e + \alpha$. Il punto

$$x_{eq,3} = \begin{bmatrix} e+\alpha \\ e \end{bmatrix}$$

è dunque un punto di equilibrio del sistema.

<u>*Domanda 2.*</u>

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} \ln x_2 & \dfrac{x_1}{x_2} \\ 1-e & 2\,x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{bmatrix} e^u \\ -(x_2-1)u \end{bmatrix}$$

e valutandole nei punti $(x_{eq,1}, u_{eq})$, $(x_{eq,2}, u_{eq})$ e $(x_{eq,3}, u_{eq})$, si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha

$$\begin{aligned}
A_{lin,1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-e & 2+\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
A_{lin,2} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \ln(-\alpha) & 0 \\ 1-e & -\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
A_{lin,3} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,3}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e+\alpha}{e} \\ 1-e & 2\,e+\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,3} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,3}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Domanda 3.

Essendo il sistema a tempo discreto, si studia il *modulo* degli autovalori dei sistemi linearizzati. Gli autovalori della matrice $A_{lin,1}$ sono 0 e $2+\alpha$. Occorre dunque studiare quando $|2+\alpha|<1$. Si ha:

$$|2+\alpha|<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<2+\alpha<1 \quad \Leftrightarrow \quad -3<\alpha<-1$$

Segue che il punto di equilibrio $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è *asintoticamente stabile* se $-3<\alpha<-1$ (tutti gli autovalori di $A_{lin,1}$ hanno modulo <1); *instabile* se $\alpha<-3$ o $\alpha>-1$ (esiste un autovalore di $A_{lin,1}$ con modulo >1), mentre nulla si può dire se $\alpha=-3$ o $\alpha=-1$ (il sistema linearizzato è marginalmente stabile).

Per $\alpha=-e$, i punti di equilibrio $x_{eq,2}$ e $x_{eq,3}$ coincidono, infatti $x_{eq,2}=x_{eq,3}=[\ 0\ e\ ]^T$. Gli autovalori della matrice $A_{lin,2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{bmatrix}$ sono 1 e e. Esistendo un autovalore di $A_{lin,2}$ con modulo >1, il punto di equilibrio $(x_{eq,2}, u_{eq})$ è *instabile*.

Esercizio 10

Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{2}x_1(k) + \frac{\alpha}{x_2(k)} + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) - x_2(k) \end{aligned}$$

nel quale $x(k) = [\ x_1(k)\ x_2(k)\ ]^T$ è lo stato, $u(k)$ è l'ingresso e $y(k)$ è l'uscita.

1. Assumendo $u(k) = 0$, $\forall\, k$, calcolare gli stati di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio calcolati al punto (1).
3. Assumendo $\alpha = 0$, calcolare la risposta libera del sistema nell'uscita $y(k)$, relativa allo stato iniziale $x_0 = [\ 0\ \ -1\ ]^T$.

Soluzione

<u>*Domanda 1.*</u>

Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{x_2} + u \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché la funzione f sia definita, se $\alpha \neq 0$, deve risultare $x_2 \neq 0$. Inoltre, se $\alpha = 0$, il sistema è *lineare*. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, si risolve il sistema

$$\boxed{x = f(x,u)}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{x_2} + u \\ x_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\,x_1 - \dfrac{\alpha}{x_2} = 0 \\ x_1 - \dfrac{3}{2}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, dalla prima equazione si trova $x_1 = 0$, e quindi $x_2 = 0$ dalla seconda equazione. In questo caso $x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è dunque l'unico punto di equilibrio del sistema.
Se $\alpha \neq 0$, dalla seconda equazione si trova $x_1 = \dfrac{3}{2}\,x_2$, e sostituendo nella prima equazione $\dfrac{\alpha}{x_2} = \dfrac{9}{4}\,x_2$, da cui $\boxed{x_2^2 = \dfrac{4}{9}\,\alpha}$. Si hanno due casi:

- Se $\alpha < 0$, l'equazione non ha soluzione. Quindi il sistema non ha punti di equilibrio.
- Se $\alpha > 0$, l'equazione ha soluzioni $x_2 = \dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha}$ e $x_2 = -\dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha}$. Sostituendo in $x_1 = \dfrac{3}{2}\,x_2$, si trova che i punti

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} \\ \dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ -\dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}$$

  sono i punti di equilibrio del sistema.

Ricapitolando:

- Se $\alpha < 0$, il sistema non ha punti di equilibrio.
- Se $\alpha = 0$, il sistema ha un unico punto di equilibrio x_{eq}.
- Se $\alpha > 0$, il sistema ha due punti di equilibrio $x_{eq,1}$ e $x_{eq,2}$.

Domanda 2.
Lo jacobiano di f rispetto a x risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\alpha}{x_2^2} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se $\boxed{\alpha = 0}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Dato che $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è *asintoticamente stabile*.

Se $\boxed{\alpha > 0}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{9}{4} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\jmath$ e $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\jmath$. Dato che $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2$, il punto di equilibrio $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è *instabile*. L'analisi è identica per il punto di equilibrio $(x_{eq,2}, u_{eq})$.

Domanda 3.

Quando $\alpha = 0$, il sistema è *lineare*. Esso può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \triangleq A\, x(k) + B\, u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) \triangleq C\, x(k) \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare la risposta libera $y(k) = C\, A^k\, x_0$.

La matrice A è in forma triangolare inferiore, e i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale. Risulta che la matrice A ha un solo autovalore $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ con molteplicità algebrica $\mu_1 = 2$. Calcoliamo la molteplicità geometrica ν_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(A - \lambda_1 I) = 1$$

Da cui

$$\nu_1 = \dim(\ker(A - \lambda_1 I)) = n - \text{rango}(A - \lambda_1 I) = 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 1 < 2 = \mu_1$$

La matrice A non è diagonalizzabile, ma solo jordanizzabile.

- Autovettore v_1 relativo a λ_1

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A - \lambda_1 I)\mathrm{v} = 0$. Essendo

  $$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  si ha

  $$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad \text{sempre verificata} \\ v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Posto arbitrariamente $v_2 = 1$ (il sistema è in due incognite, anche se v_2 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- <u>Autovettore generalizzato v_2 relativo a λ_1</u>

  Dobbiamo determinare una soluzione v del sistema non omogeneo $(A - \lambda_1 I)\mathrm{v} = \mathrm{v}_1$. Si ha

$$0 = 0 \qquad \text{sempre verificata}$$
$$v_1 = 1$$

  Posto arbitrariamente $v_2 = 0$ (il sistema è in due incognite, anche se v_2 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice T si costruisce nel seguente modo:

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A essa corrisponde la matrice trasformata

$$\tilde{A} = T^{-1} A\, T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

Per evitare di invertire T, il vettore $\mathrm{z}_0 = T^{-1}\mathrm{x}_0$ si ricava risolvendo il sistema lineare $T\,\mathrm{z}_0 = \mathrm{x}_0$. Si ha

$$z_2 = 0$$
$$z_1 = -1$$

Quindi,

$$\mathrm{z}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ritornando al calcolo di $y(k)$:

$$\begin{aligned} y(k) &= C\,A^k\,x_0 = (C\,T)\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Esercizio 11

Un sistema massa-molla-smorzatore è descritto dall'equazione differenziale

$$M\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

nel quale $y(t)$ rappresenta la posizione della massa all'istante t e $u(t)$ è la forza esterna applicata alla massa. Il valore della massa è $M = 1$, mentre i valori della costante elastica K della molla e del coefficiente d'attrito β sono incogniti ($\beta \geq 0$, $K > 0$).

1. Determinare una rappresentazione di stato del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, e le corrispondenti matrici A, B, C e D.

2. Assumendo $\beta = 2$, studiare i modi propri del sistema al variare di $K > 0$.

Soluzione

<u>*Domanda 1.*</u>
L'equazione del sistema è ($M = 1$)

$$\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

Definendo lo stato come

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -Ky - \beta\dot{y} + u = -Kx_1 - \beta x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -\beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \triangleq C\,x(t) \quad (D = 0) \end{aligned}$$

<u>*Domanda 2.*</u>
Quando $\beta = 2$, il polinomio caratteristico della matrice A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + K$, per il quale $\Delta = 4(1 - K)$. Si distinguono *tre casi*:

- $\boxed{\Delta > 0\text{, cioè } 0 < K < 1}$

  La matrice A ha due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1 + \sqrt{1-K}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{1-K}$. I modi del sistema sono $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$.

- $\boxed{\Delta = 0\text{, cioè } K = 1}$

  La matrice A ha un unico autovalore reale $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. I modi del sistema sono e^{-t} e $t\,e^{-t}$.

- $\boxed{\Delta < 0\text{, cioè } K > 1}$

  La matrice A ha una coppia di autovalori complessi e coniugati $\lambda_1 = -1 + \jmath\sqrt{K-1}$ e $\lambda_2 = -1 - \jmath\sqrt{K-1}$. I modi del sistema sono $e^{-t}\sin\left(\sqrt{K-1}\,t\right)$ e $e^{-t}\cos\left(\sqrt{K-1}\,t\right)$.