

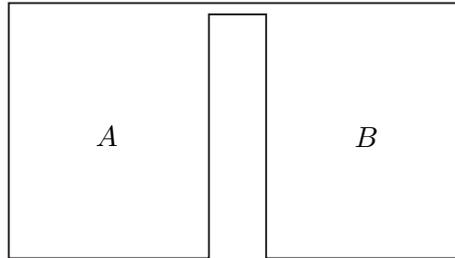
## Esame di Sistemi Dinamici - 16.02.2011

Studente: \_\_\_\_\_ N. Matricola: \_\_\_\_\_

### Prima parte del corso

#### Esercizio 1

In un esperimento con gas perfetti,  $n$  molecole di gas sono introdotte nel contenitore in figura:



A causa del movimento cinetico casuale delle molecole, queste possono passare dall'ambiente  $A$  all'ambiente  $B$ , e viceversa. In particolare, nell'unità di tempo una frazione  $\alpha \in [0, 1]$  di molecole passa dall'ambiente  $A$  all'ambiente  $B$ , mentre una frazione  $\beta \in [0, 1]$  passa in direzione contraria. Si indichino con  $x_A$  e  $x_B$  il numero di molecole presenti negli ambienti  $A$  e  $B$ , rispettivamente.

1. Modellare il sistema mediante un modello lineare stazionario a tempo discreto del tipo:

$$x(t+1) = Ax(t)$$

dove  $t$  è l'indice temporale (in unità di tempo) e  $x(t) = [x_A(t) \ x_B(t)]^T$ .

2. Ragionando esclusivamente sulla "fisica" del sistema, stabilire se il sistema è asintoticamente stabile/stabile/instabile.
3. Determinare i modi del sistema al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ . In particolare, per quali valori di  $\alpha$  e  $\beta$  si hanno modi oscillanti? Perché?
4. Posto  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , determinare, se esiste, il numero asintotico (cioè per  $t \rightarrow \infty$ ) di molecole nell'ambiente  $A$ . Questo numero dipende da quante molecole sono inizialmente presenti nell'ambiente  $A$ ?

#### Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dal modello nonlineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x^2(t)y^2(t) + x^2(t) - 2y^2(t) + 2 \\ \dot{y}(t) &= -x^2(t) + \alpha y(t) - 2,\end{aligned}$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  è un parametro.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro  $\alpha$ .
2. Studiare la stabilità di tutti i punti di equilibrio trovati.

## Seconda parte del corso

### Esercizio 3

Sia data la funzione di trasferimento  $G(s)$  chiusa in retroazione negativa. Sia  $W(s)$  la funzione di trasferimento in anello chiuso. Si calcoli la risposta per  $t$  che tende all'infinito quando in ingresso alla  $W(s)$  si applica un segnale  $u(t)$  costituito dalla somma di un gradino e di un segnale sinusoidale

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$
$$u(t) = \text{step}(t) + \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

### Esercizio 4

Si tracci il diagramma di Bode asintotico e reale della seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2(s-0.1)}{(s^2+100)(s+0.1)}$$