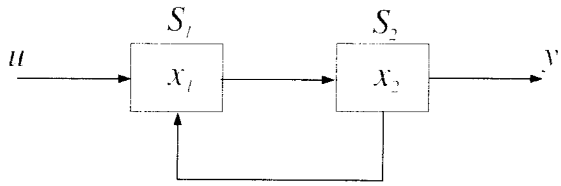
I prova in itinere di Sistemi Dinamici - 01.12.2010

Tipo A

Esercizio 1

La linea di produzione rappresentata in figura è costituita da due stazioni di lavorazione S_1 e S_2:



Si indichi con x_i il numero di pezzi all'interno della stazione S_i, $i = 1, 2$, con u il numero di pezzi grezzi in ingresso giornalmente alla stazione S_1, e con y il numero di pezzi in uscita giornalmente dalla stazione S_2 verso il magazzino.

Ogni giorno 2/3 dei pezzi in S_1 termina la lavorazione in S_1 e viene trasferito in S_2 per la successiva lavorazione, mentre 1/2 dei pezzi in S_2 termina la lavorazione in S_2. Di questi, una frazione pari a 1/8 risulta difettosa al controllo di qualità, e viene rimandata alla stazione S_1 per la rilavorazione, mentre i pezzi terminati in S_2 e non difettosi sono trasferiti al magazzino.

1. Modellare il sistema mediante un modello lineare stazionario a tempo discreto del tipo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

   dove t è l'indice temporale (in giorni).

2. Supponendo che la linea di produzione sia inizialmente vuota, e che durante il giorno iniziale vengano introdotti 10 pezzi grezzi in S_1, e nessuno nei giorni successivi, determinare dopo quanti giorni almeno il 50% dei pezzi introdotti inizialmente ha raggiunto il magazzino.

Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dal modello lineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) = A\,x(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro, e la matrice $C = [\; c_1 \; c_2 \; c_3 \;]$ è indeterminata.

1. Studiare la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro α.

Si ponga $\alpha = -2$.

2. Calcolare la risposta libera $x(t)$ con stato iniziale $x(0) = [\; 0 \;\; -1 \;\; 0 \;]^T$.

3. Determinare la matrice C in maniera tale che $y(t)$ converga asintoticamente a 0 per ogni stato iniziale.

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal modello nonlineare stazionario a tempo discreto:

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= x_1(t)x_2^2(t) - 3x_1(t) \\
x_2(t+1) &= x_2(t) + x_2^2(t) + x_1(t)x_2(t) + u(t).
\end{aligned}
$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 4$, $\forall t$.

2. Riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} dei corrispondenti sistemi linearizzati.

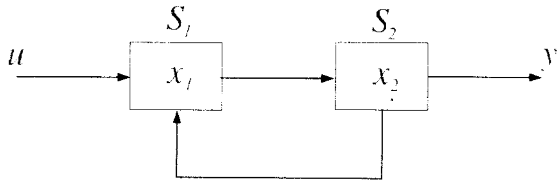
3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati.

I prova in itinere di Sistemi Dinamici - 01.12.2010

Tipo B

Esercizio 1

La linea di produzione rappresentata in figura è costituita da due stazioni di lavorazione S_1 e S_2:



Si indichi con x_i il numero di pezzi all'interno della stazione S_i, $i = 1, 2$, con u il numero di pezzi grezzi in ingresso giornalmente alla stazione S_1, e con y il numero di pezzi in uscita giornalmente dalla stazione S_2 verso il magazzino.

Ogni giorno 1/2 dei pezzi in S_1 termina la lavorazione in S_1 e viene trasferito in S_2 per la successiva lavorazione, mentre 2/3 dei pezzi in S_2 termina la lavorazione in S_2. Di questi, una frazione pari a 1/8 risulta difettosa al controllo di qualità, e viene rimandata alla stazione S_1 per la rilavorazione, mentre i pezzi terminati in S_2 e non difettosi sono trasferiti al magazzino.

1. Modellare il sistema mediante un modello lineare stazionario a tempo discreto del tipo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

   dove t è l'indice temporale (in giorni).

2. Supponendo che la linea di produzione sia inizialmente vuota, e che durante il giorno iniziale vengano introdotti 10 pezzi grezzi in S_1, e nessuno nei giorni successivi, determinare dopo quanti giorni almeno il 40% dei pezzi introdotti inizialmente ha raggiunto il magazzino.

Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dal modello lineare stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1/4 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) = A\,x(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro, e la matrice $C = [\ c_1\ c_2\ c_3\ ]$ è indeterminata.

1. Studiare la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro α.

Si ponga $\alpha = 1/2$.

2. Calcolare la risposta libera $x(t)$ con stato iniziale $x(0) = [\ 0\ 2\ 0\ ]^T$.

3. Determinare la matrice C in maniera tale che $y(t)$ converga asintoticamente a 0 per ogni stato iniziale.

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal modello nonlineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= u(t)x_2(t) + x_1(t)x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -3x_1(t) - x_1^2(t)x_2(t).\end{aligned}$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 1$, $\forall t$.

2. Riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} dei corrispondenti sistemi linearizzati.

3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati.

SOLUZIONI TIPO A

esercizio 1

1. $x_1(t+1) = x_1(t) - \frac{2}{3} x_1(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} x_2(t) + u(t)$

$x_2(t+1) = x_2(t) - \frac{1}{2} x_2(t) + \frac{2}{3} x_1(t)$

$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} x_2(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{3} x_1(t) + \frac{1}{16} x_2(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{2}{3} x_1(t) + \frac{1}{2} x_2(t) \\ y(t) = \frac{7}{16} x_2(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

2. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u(0) = 10$, $u(t) = 0 \ \forall t > 0$

$y(0) = Cx(0) = 0 \qquad \Rightarrow y(0) < 5$

$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y(1) = C\,x(1) = 0 \qquad \Rightarrow y(0) + y(1) = 0 < 5$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 20/3 \end{bmatrix}$

$y(2) = Cx(2) = \frac{35}{12} \simeq 2.92 \qquad \Rightarrow y(0) + y(1) + y(2) = \frac{35}{12} < 5$

$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{bmatrix} 55/36 \\ 50/9 \end{bmatrix}$

$y(3) = Cx(3) = \frac{175}{72} \simeq 2.43 \qquad \Rightarrow y(0) + y(1) + y(2) + y(3) = \frac{385}{72} > 5$

$\Rightarrow$ risposta: $\underline{t = 3}$

esercizio 2

1.
$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \alpha \quad (\text{se } \alpha \neq 0) \end{cases}$$

SISTEMA A TEMPO CONTINUO

caso 1: $\alpha \neq 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 2$

$\lambda_2 = \alpha, \quad \mu_2 = 1$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rango} = 1 \text{ se } \alpha = -2 \Rightarrow \nu_1 = 2 \\ \text{rango} = 2 \text{ se } \alpha \neq -2 \Rightarrow \nu_1 = 1 \end{cases}$$

- se $\alpha \neq 0, \alpha \neq -2$,

  essendo $\nu_1 < \mu_1$ per l'autovalore $\lambda_1 = 0$, il sistema è INSTABILE.
  I modi sono: $1, t, e^{\alpha t}$.

- se $\alpha = -2$,

  essendo $\nu_1 = \mu_1$ per $\lambda_1 = 0$, e $\lambda_2 < 0$, il sistema è STABILE (semplicemente).
  I modi sono: $1, e^{-2t}$.

caso 2: $\alpha = 0$

$\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 3$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2 \Rightarrow \nu_1 = 1$$

Essendo $\nu_1 < \mu_1$ per $\lambda_1 = 0$, il sistema è INSTABILE.
I modi sono: $1, t, t^2$.

2. È sufficiente osservare che

$$A x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè $x(0)$ è autovettore di A relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$. Dunque:

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} x(0) = x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \geq 0.$$

<u>NOTA</u>: Lo stesso risultato si ottiene calcolando e^{At}, ecc., ma al costo di molti più calcoli!

3. Per $\alpha = -2$, la matrice A è diagonalizzabile. Siano $v_{1,1}$ e $v_{1,2}$ due autovettori linearmente indipendenti relativi a $\lambda_1 = 0$, e v_2 un autovettore relativo a $\lambda_2 = -2$.

Risulta:

$$x(t) = z_1 v_{1,1} + z_2 v_{1,2} + z_3 e^{-2t} v_2$$

dove z_1, z_2 e z_3 sono coefficienti che dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

$$y(t) = C x(t) = z_1 \underbrace{C v_{1,1}}_{\text{costante}} + z_2 \underbrace{C v_{1,2}}_{\text{costante}} + z_3 \underbrace{e^{-2t}}_{0 \text{ per } t \to \infty} C v_2$$

Affinché $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ <u>per ogni</u> $x(0)$, occorre che:

$$\begin{cases} C v_{1,1} = 0 \\ C v_{1,2} = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo dunque $v_{1,1}$ e $v_{1,2}$.

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_1 + 2x_3 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = -2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

$$\implies v_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{1,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Cv_{1,1} = c_2 = 0 \\ Cv_{1,2} = -2c_1 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 2c_1 \end{cases}$$

Per esempio: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

esercizio 3

1. $$\begin{cases} x_1 = x_1 x_2^2 - 3x_1 \\ x_2 = x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(x_2^2 - 4) = 0 \\ x_2^2 + x_1 x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

- Se $x_1 = 0$, $x_2^2 + 4 = 0$ non ha soluzioni reali.
- Se $x_1 \neq 0$, $x_2^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm 2$

  Da cui: $\pm 2x_1 + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = \mp 4$

  $$\Rightarrow x_{eq,1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2^2 - 3 & 2x_1 x_2 \\ x_2 & 1 + 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,1} = \begin{bmatrix} 1 & -16 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,2} = \begin{bmatrix} 1 & -16 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $x_{eq,1}$ INSTABILE perche' $|\lambda_1| = |\lambda_2| \simeq 5.74 > 1$

   $x_{eq,2}$ INSTABILE perche' $|\lambda_1| \simeq 6.66 > 1$; inoltre $|\lambda_2| \simeq 4.66 > 1$.

SOLUZIONI TIPO B

esercizio 1

Soluzioni analoghe al TIPO A. In questo caso risultano:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix}.$$

esercizio 2

$$A=\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \alpha \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \alpha \quad (\text{se } \alpha \neq 1) \end{cases}$$

SISTEMA A TEMPO DISCRETO

Caso 1: $\alpha \neq 1$

$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 2$

$\lambda_2 = \alpha, \quad \mu_2 = 1$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{rango} = 1 \quad \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \nu_1 = 2 \\ \text{rango} = 2 \quad \text{se } \alpha \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \nu_1 = 1 \end{cases}$$

- se $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$,

  essendo $\nu_1 < \mu_1$ per l'autovalore $\lambda_1 = 1$, il sistema e' INSTABILE.

  I modi sono: $1, t, \alpha^t$.

- se $\alpha = \frac{1}{2}$,

  essendo $\nu_1 = \mu_1$ per $\lambda_1 = 1$, e $|\lambda_2| < 1$, il sistema e' STABILE (semplicemente).

  I modi sono: $1, \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Caso 2: $\alpha = 1$

$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 3$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{ rango} = 2 \Rightarrow \nu_1 = 1$$

Essendo $\nu_1 < \mu_1$ per $\lambda_1 = 1$, il sistema è INSTABILE.

I modi sono: $1, t, t^2$.

2. È sufficiente osservare che

$$A x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = x(0)$$

cioè $x(0)$ è autovettore di A relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$. Dunque:

$$x(t) = \lambda_1^t x(0) = x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \geq 0.$$

<u>NOTA</u>: Lo stesso risultato si ottiene calcolando A^t, ecc., ma al costo di molti più calcoli!

3. Per $\alpha = \frac{1}{2}$, la matrice A è diagonalizzabile. Siano $v_{1,1}$ e $v_{1,2}$ due autovettori linearmente indipendenti relativi a $\lambda_1 = 0$, e v_2 un autovettore relativo a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Risulta:

$$x(t) = z_1 v_{1,1} + z_2 v_{1,2} + z_3 \left(\tfrac{1}{2}\right)^t v_2$$

dove z_1, z_2 e z_3 sono coefficienti che dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

$$y(t) = Cx(t) = z_1 \underbrace{C v_{1,1}}_{\text{costante}} + z_2 \underbrace{C v_{1,2}}_{\text{costante}} + z_3 \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^t C v_2}_{0 \text{ per } t \to \infty}$$

Affinché $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ <u>per ogni</u> $x(0)$, occorre che:

$$\begin{cases} C v_{1,1} = 0 \\ C v_{1,2} = 0. \end{cases}$$

Si calcolano $v_{1,1}$ e $v_{1,2}$. Per esempio, risulta $v_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_{1,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Da cui:

$$\begin{cases} Cv_{n,1} = c_2 = 0 \\ Cv_{1,2} = -2c_1 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 2c_1 \end{cases}$$

Per esempio: $C = [1 \ 0 \ 2]$.

esercizio 3

1. $$\begin{cases} 0 = x_2 + x_1 x_2 \\ 0 = -3x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(x_1+1) = 0 \\ x_1(x_1 x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

- $x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $x_1 = -1 \Rightarrow -x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_2 & u + x_1 \\ -3 - 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Gli autovalori di $A_{lin,1}$ sono immaginari puri, dunque non si può concludere nulla sulla stabilità di $x_{eq,1}$ applicando il metodo indiretto di Lyapunov.

$x_{eq,2}$ è INSTABILE perché $\lambda_1 = 3 > 0$.