COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 27.07.2007

Studente: ________________________ **N. Matricola:** ____________________

I parte – Esercizio 1.

E' dato il sistema lineare stazionario a tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \triangleq A\,x(k) + B\,u(k),$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$ è lo stato e $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso.

1. Studiare la stabilità e i modi del sistema.
2. Posto $x(0) = [\,0\;0\,]^\top$, determinare quali ingressi $u(0)$ e $u(1)$ devono essere applicati in modo tale che $x(2) = [\,2\;4\,]^\top$.

Posto $u(k) = F\,x(k)$, con $F = [\,f_1\;f_2\,]$, il sistema diventa:

$$x(k+1) = (A + BF)\,x(k).$$

3. Determinare la matrice F in maniera tale che $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\,\frac{\pi}{2})$ sia un modo del sistema.

I parte – Esercizio 2.

Sia dato il sistema nonlineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - u(t)\,x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - 3\,x_2(t) + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, $\forall t$.
2. Riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} dei corrispondenti sistemi linearizzati.
3. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati.

II parte – Esercizio 3.

E' dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \triangleq C\,x(t) + D\,u(t), \end{aligned}$$

dove $x \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, e $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $P(s)$ del sistema dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$.
2. Il sistema è asintoticamente stabile/stabile/instabile? E' ILUL stabile da $u(t)$ a $y(t)$? Giustificare le risposte.
   Suggerimento: Attenzione alle cancellazioni in $P(s)$...
3. Calcolare la risposta forzata $y(t)$ del sistema all'ingresso $u(t) = \big[1 - \sin(2\,t)\big]\,\mathbf{1}(t)$, dove $\mathbf{1}(t)$ è la funzione gradino unitario.
4. Nella risposta calcolata al punto 3, distinguere la parte di risposta a regime permanente, e verificare che essa coincide con l'espressione ottenibile applicando il teorema della risposta in frequenza.

II parte – Esercizio 4.

E' dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

$$P(s) = \frac{0.2\,(s^2 - 100.1\,s + 10)}{s^2 + 0.2\,s + 1}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $P(\jmath\omega)$.
2. Determinare approssimativamente in quale intervallo di frequenze il sistema attenua più di 10 dB.