I Prova in Itinere di Fondamenti di Automatica 07.06.2007

Studente: ______________________ **N. Matricola:** ______________________

Esercizio 1

Per ciascuno dei seguenti modelli dall'ingresso u all'uscita y, dire, giustificando la risposta, se rappresentano un sistema statico/dinamico, lineare/nonlineare, stazionario/non stazionario.

1. $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\,\dfrac{dy(t)}{dt}y(t) + 2\,y(t) = u(t) + \dfrac{du(t)}{dt}$
2. $y(t) = t^2\,u(t)$
3. $\dfrac{dy(t)}{dt} - y(t) = \sin(2t)\,u(t)$
4. $\dfrac{dy(t)}{dt} + e^{-t}\,y(t) = u^2(t)$

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= A\,\mathrm{x}(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) \end{aligned}$$

dove $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $C = [\ c_1 \quad c_2 \quad c_3\ ]$.

1. Discutere la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro reale α.

Posto $\alpha = 2$:

2. Dati $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ e $\mathrm{x}(0) = [\ 1 \quad -1 \quad 0\ ]^\top$, determinare $\mathrm{x}(2)$.
3. Determinare, se esiste, una matrice C non nulla tale che la risposta libera nell'uscita $y_\ell(k)$ è sempre limitata per ogni condizione iniziale $\mathrm{x}(0)$.
4. Posto $C = [\ 2 \quad 1 \quad 0\ ]$, determinare, se esiste, una condizione iniziale $\mathrm{x}(0)$ tale che la risposta libera nell'uscita coincide con $y_\ell(k) = -2^k$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema nonlineare a tempo continuo con ingresso u, uscita y, e la cui relazione ingresso/uscita è descritta dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \gamma\,\frac{dy(t)}{dt} - \frac{1}{2}\,\frac{u(t)}{y(t)} + 1 = 0.$$

1. Scrivere una rappresentazione del sistema in forma di spazio di stato.
2. Posto $u(t) = 2\ \forall t$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema al variare del parametro reale γ.

Soluzioni

Esercizio 1

1. dinamico, nonlineare, stazionario

   è un'equazione differenziale — prodotto $\dot{y}y$ — non c'è dipendenza esplicita dal tempo

2. statico, lineare, non stazionario

   non compaiono derivate di y e u — y e u compaiono linearmente — c'è dipendenza esplicita dal tempo (t^2)

3. dinamico, lineare, non stazionario

   è un'equazione differenziale — $\dot{y}, y$ e u compaiono linearmente — c'è dipendenza esplicita dal tempo $(\sin(2t))$

4. dinamico, nonlineare, non stazionario

   è un'equazione differenziale — compare u^2 — c'è dipendenza esplicita dal tempo (e^{-t})

Esercizio 2

1. La stabilità del sistema dipende dagli autovalori della matrice A.

   Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & 1 \\ \alpha & -\alpha & \lambda-(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left[\lambda\left(\lambda-(1+\alpha)\right)+\alpha\right] = \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left[\lambda^2-(1+\alpha)\lambda+\alpha\right]$$

sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla prima riga

$$\Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha = 1+2\alpha+\alpha^2-4\alpha$$

$$= \underbrace{1-2\alpha+\alpha}_{\text{quadrato di un binomio}} = (1-\alpha)^2$$

$$\lambda = \frac{1+\alpha \pm (1-\alpha)}{2} = \begin{cases} 1 \\ \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)$$

Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = \alpha$

Quindi:

- se $|\alpha| < 1$, il sistema e' semplicemente stabile.

  Infatti, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_3| < 1$ e $|\lambda_2| = 1$ con $\mu_2 = \nu_2$ $\left(\mu_2 = 1 \Rightarrow \nu_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = \nu_2\right)$

- se $|\alpha| > 1$, il sistema e' instabile.

  Infatti, $|\lambda_3| > 1$.

- se $|\alpha| = 1$, allora distinguiamo due casi:

  * $\alpha = -1$ $\Rightarrow$ il sistema e' semplicemente stabile.

    Infatti, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| = 1$ con $\mu_2 = \nu_2$ e $|\lambda_3| = 1$ con $\mu_3 = \nu_3$

  * $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ il sistema e' instabile

    Infatti, $\lambda_3 = \lambda_2 = 1$, quindi $\mu_2 = 2$. Dobbiamo calcolare la molteplicità geometrica di λ_2. Risulta:

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Attenzione: abbiamo sostituito $\alpha = 1$.

$$\nu_2 = n - \text{rango}(\lambda_2 I - A) = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 < \mu_2$$

Dunque, $|\lambda_2| = 1$ con $\nu_2 < \mu_2 \Rightarrow$ sistema <u>instabile</u>.

Per quanto riguarda i <u>modi del sistema</u>, essi sono:

- $\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ 1,\ \alpha^k$ se $\alpha \neq 1$ $\longrightarrow$ NOTA: Se $\alpha = \frac{1}{2}$, risulta $\lambda_1 = \lambda_3$. Quindi, $\mu_1 = 2$. D'altra parte, risulta anche $\nu_1 = 2$ e A e' diagonalizzabile. I modi sono $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ e 1.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^k,\ 1,\ k$ se $\alpha = 1$

In questo caso la forma di Jordan $\tilde{A}$ di A e'

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Posto $\alpha = 2$, la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Per calcolare $x(2)$ applichiamo l'equazione alle differenze dello stato

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

con $k=0$ e $k=1$. Abbiamo:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{23}{4} \\ -17 \end{bmatrix}$$

Quindi $x(2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{23}{4} \\ -17 \end{bmatrix}$.

3. Per $\alpha = 2$, gli autovalori di A sono

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{autovalori distinti} \Rightarrow \underline{\text{A diagonalizzabile}}$$

La risposta libera nell'uscita può essere scritta nella forma

$$
\begin{aligned}
y_e(k) &= \alpha_1 \lambda_1^k C v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k C v_2 + \alpha_3 \lambda_3^k C v_3 \\
&= \alpha_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^k C v_1 + \alpha_2 C v_2 + \alpha_3 2^k C v_3
\end{aligned}
$$

dove v_1, v_2 e v_3 sono autovettori di A relativi a λ_1, λ_2 e λ_3, rispettivamente, e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono le coordinate della (generica) condizione iniziale $x(0)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. $\rightarrow x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

Dato che i modi $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ e 1 sono limitati (un modo convergente è anche limitato), affinché $y_e(k)$ rimanga sempre limitata occorre che il modo divergente 2^k scompaia dalla sua espressione. Ciò può essere ottenuto scegliendo C tale che $\boxed{C v_3 = 0}$. Calcoliamo v_3:

$$
\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ parametro libero: $x_2 = \alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_3}$

Dunque: $C v_3 = 0 \iff \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \iff \boxed{c_2 - 2c_3 = 0}$

- condizione generale -

Scegliendo per esempio $C = [1 \ 0 \ 0]$, risolviamo il problema.

4. Riprendendo l'espressione

$$
y_e(k) = \alpha_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^k C v_1 + \alpha_2 C v_2 + \alpha_3 2^k C v_3,
$$

affinché sia $y_e(k) = -2^k$ imponiamo

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 C v_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = -1$$

$$C v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1$$

Quindi: $x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = -v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

NOTA- In questo esercizio occorreva calcolare solo l'autovettore v_3 relativo a λ_3.

Esercizio 3

1. Definiamo lo stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\gamma \dot{y}(t) + \frac{1}{2}\frac{u(t)}{y(t)} - 1 = -\gamma x_2(t) + \frac{1}{2}\frac{u(t)}{x_1(t)} - 1$$

Il sistema è nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

con

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\gamma x_2 + \frac{1}{2}\frac{u}{x_1} - 1 \end{bmatrix}$$

2. Per calcolare i punti di equilibrio del sistema con $u(t) = u_{eq} = 2 \ \forall t$, risolviamo

$$f(x_{eq}, u_{eq}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\gamma x_2 + \frac{1}{2}\frac{2}{x_1} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{1}{x_1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio del sistema è $x_{eq} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Per studiare la stabilità di x_{eq} attraverso il metodo indiretto di Lyapunov, ci occorre $A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_{eq} \\ u = u_{eq}}}$.

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}\frac{u}{x_1^2} & -\gamma \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_{eq} \\ u = u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$p_{A_{lin}}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{lin}) = \lambda(\lambda + \gamma) + 1 = \lambda^2 + \gamma\lambda + 1$$

Per il criterio dei segni di Cartesio abbiamo che:

- se $\gamma > 0$ ($\Rightarrow$ due permanenze di segno), A_{lin} ha due autovalori con parte reale negativa, e quindi x_{eq} è asintoticamente stabile.
- se $\gamma < 0$ ($\Rightarrow$ due variazioni di segno), A_{lin} ha due autovalori con parte reale positiva, e quindi x_{eq} è instabile.
- se $\gamma = 0$, nulla si può concludere sulla stabilità di x_{eq}. A_{lin} ha due autovalori immaginari.