

COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 28.09.2006

Candidato:

N. Matricola:

Esercizio 1.

In una riserva naturale viene censito annualmente il numero di coppie della specie X, distinguendo tra coppie in età non fertile e coppie in età fertile. Dall'analisi dei dati del censimento, risulta che:

- Il tasso di mortalità tra le coppie in età fertile è pari a $\alpha \in (0, 1)$, mentre è trascurabile tra le coppie in età non fertile.
- Ogni anno il numero di coppie nuove nate (in età non fertile) è pari a una frazione $\beta \in (0, 1)$ del numero di coppie in età fertile nell'anno precedente.

Inoltre è noto che, per la specie considerata, ogni coppia diventa fertile dopo un anno dalla nascita, e che annualmente un numero di coppie in età fertile può essere introdotto dall'esterno nella riserva.

Si indichino con $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $y(k)$ rispettivamente il numero di coppie in età non fertile, il numero di coppie in età fertile, e il numero totale di coppie presenti nella riserva all'inizio dell'anno k -esimo ($k = 0, 1, 2, \dots$). Si indichi infine con $u(k)$ il numero di coppie in età fertile introdotto dall'esterno nella riserva nel corso dell'anno k -esimo.

a) Si determini il modello lineare stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= A \mathbf{x}(k) + B u(k) \\ y(k) &= C \mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

che descrive l'evoluzione del sistema, dove $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]'$.

b) Si studi la stabilità del sistema al variare dei parametri $\alpha \in (0, 1)$ e $\beta \in (0, 1)$.

c) Posto $\alpha = \beta = 2/5$, e supponendo che non vengano introdotte dall'esterno coppie in età fertile, si determini per quali condizioni iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ il numero totale di coppie nella riserva si mantiene identicamente uguale a 35.

d) Posto $\alpha = 1/2$ e $\beta = 3/16$, si calcoli l'andamento del numero totale di coppie nella riserva, supponendo che essa sia inizialmente vuota, e ogni anno vi vengano introdotte dall'esterno 5 coppie in età fertile. Qual è il valore a regime del numero totale di coppie nella riserva?

Esercizio 2.

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1 + x_1^2(t) + \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_2(t) + \sin(x_1(t)) - u(t)\end{aligned}$$

si calcolino i punti di equilibrio del sistema per ingresso costante $u(t) = 3\pi$, e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 3.

Data la funzione dei trasferimento

$$W(s) = \frac{2s^2(s-10)}{(s^2 + 0.3s + 200)(s - \frac{1}{100})}$$

tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(j\omega)$.