COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 05.09.2006

Candidato: N. Matricola:

Esercizio 1.

E' dato il sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \sigma & 2 \\ -2 & \sigma \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \triangleq \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita, e σ è un parametro reale.

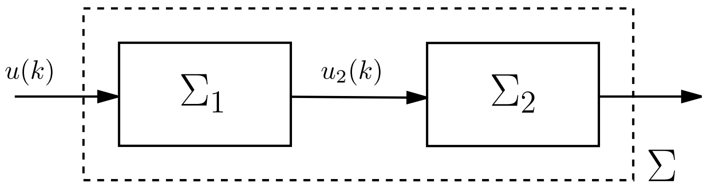
a) Studiare la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro σ.

b) Determinare i valori di σ e della condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, se esistono, in modo tale che la risposta libera nell'uscita $y(t)$ coincida con $5\sin(2\,t)$.

c) Posto $\sigma = -1$, determinare la risposta a regime permanente in $y(t)$, se esiste, corrispondente all'ingresso $u(t) = 3\sin(\sqrt{5}\,t)$.

Esercizio 2.

Un sistema nonlineare a tempo discreto Σ è dato dalla connessione in serie in figura:



dove il sistema Σ_1 ha equazione

$$x_1(k+1) = \frac{1}{3}\,x_1(k) + 3\,u(k)$$

il sistema Σ_2 ha equazione

$$x_2(k+1) = \alpha\,x_2(k) + x_2^2(k)\,u_2(k)$$

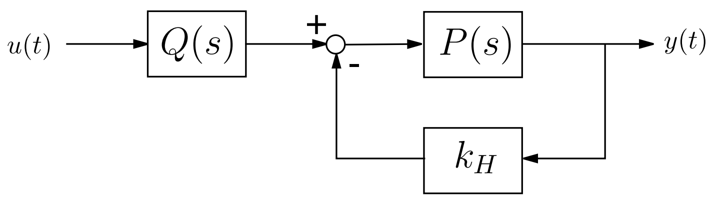
α è un parametro reale, e $u_2(k) = -\dfrac{1}{18}\,x_1(k)$.

a) Scrivere le equazioni del sistema Σ in forma di spazio di stato.

b) Posto $u(k) = -2$, $\forall k$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema Σ al variare del parametro α.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in figura:



dove $P(s) = \dfrac{s+8}{s(s-2)}$, $Q(s) = \dfrac{1}{s+1}$, e k_H è un parametro reale. Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema da $u(t)$ a $y(t)$.

a) Studiare la stabilità ILUL di $W(s)$ al variare del parametro k_H.

b) Posto $k_H = 2$, calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso gradino unitario.

c) Posto $k_H = 3$, tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della funzione di risposta in frequenza $W(\jmath\omega)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

a) La matrice A del sistema e' $A = \begin{bmatrix} \sigma & 2 \\ -2 & \sigma \end{bmatrix}$. Si osservi che tale matrice e' nella forma $A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ con $\omega = 2$, e quindi e' noto dalla teoria che $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos(\omega t) & e^{\sigma t}\sin(\omega t) \\ -e^{\sigma t}\sin(\omega t) & e^{\sigma t}\cos(\omega t) \end{bmatrix}$.

I modi del sistema sono: $e^{\sigma t}\cos(2t)$, $e^{\sigma t}\sin(2t)$.

Il sistema e':

- <u>instabile</u> per $\sigma > 0$
- <u>(semplicemente) stabile</u> per $\sigma = 0$
- <u>asintoticamente stabile</u> per $\sigma < 0$

b) Dall'analisi dei modi del sistema, affinche' la risposta libera $y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$ coincida con $y_\ell(t) = 5\sin(2t)$ deve essere

$\boxed{\sigma = 0}$

si e' posto $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Dunque:

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) & 2\sin(2t) + \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} =$$

$$= 2\alpha\cos(2t) - \alpha\sin(2t) + 2\beta\sin(2t) + \beta\cos(2t) =$$

$$= (2\alpha + \beta)\cos(2t) + (-\alpha + 2\beta)\sin(2t) = 5\sin(2t)$$

imponiamo l'uguaglianza

Dunque:

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ -\alpha+2\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ -\alpha+2(-2\alpha)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha \\ -5\alpha=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow \quad X_0=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

c) Posto $\sigma=-1$, essendo $\sigma<0$ il sistema e' asintoticamente stabile, quindi anche ILUL stabile, ed esiste la risposta a regime permanente a ingressi sinusoidali.

La funzione di trasferimento $W(s)$ da $u(t)$ a $y(t)$ e':

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2+4}\begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 \\ -2 \end{bmatrix}=\frac{2s}{s^2+2s+5}$$

Quindi:

$$W(j\sqrt{5})=\frac{2j\sqrt{5}}{\cancel{\underbrace{(j\sqrt{5})^2}_{-5}}+2j\sqrt{5}\cancel{+5}}=1 \quad \Rightarrow \quad |W(j\sqrt{5})|=1, \quad \angle W(j\sqrt{5})=0$$

Per il teorema della risposta in frequenza:

$$y_p(t)=3\underbrace{|W(j\sqrt{5})|}_{1}\sin\left(\sqrt{5}t+\underbrace{\angle W(j\sqrt{5})}_{0}\right)=3\sin(\sqrt{5}t)$$

Esercizio 2

a) L'ingresso del sistema Σ_2 è $u_2(k)$, che ha l'espressione:

$$u_2(k) = -\frac{1}{18} x_1(k)$$

Dunque, sostituendo nell'equazione di aggiornamento di x_2:

$$x_2(k+1) = \alpha x_2(k) + x_2^2(k)\left(-\frac{1}{18} x_1(k)\right)$$

$$= \alpha x_2(k) - \frac{1}{18} x_1(k) x_2^2(k)$$

Le equazioni di stato di Σ sono:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{3} x_1(k) + 3u(k) \\ x_2(k+1) = \alpha x_2(k) - \frac{1}{18} x_1(k) x_2^2(k) \end{cases}$$

che sono nella forma:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

con $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ e $f(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} x_1 + 3u \\ \alpha x_2 - \frac{1}{18} x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$

b) Posto $u(k) = -2$, $\forall k$, i punti di equilibrio del sistema si ottengono risolvendo

$$x = f(x,u)$$

con $u = u_{eq} = -2$. Dunque:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x_1 - 6 = x_1 \\ \alpha x_2 - \frac{1}{18} x_1 x_2^2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} x_1 = -6 \\ -\frac{1}{18} x_1 x_2^2 - (1-\alpha) x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2\left[\frac{1}{2}x_2 - (1-\alpha)\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = \begin{cases} 0 \\ 2(1-\alpha) \end{cases} \end{cases}$$

Due punti di equilibrio: $X_{eq,1} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_{eq,2} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2(1-\alpha) \end{bmatrix}$.

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{18}x_2^2 & \alpha - \frac{1}{9}x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

Da cui:

- $A_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X = X_{eq,1} \\ u = u_{eq}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ forma diagonale

↳ gli autovalori di $A_{lin,1}$ sono $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = \alpha$ (<u>di immediata lettura</u>)

Dato che $|\lambda_1| < 1$, risulta:

- se $|\lambda_2| = \underset{(-1<\alpha<1)}{|\alpha| < 1}$, il punto di equilibrio $X_{eq,1}$ è <u>asintoticamente stabile</u>.
- se $|\lambda_2| = \underset{(\alpha<-1 \text{ o } \alpha>1)}{|\alpha| > 1}$, " " " " " <u>instabile</u>.
- se $|\lambda_2| = \underset{(\alpha=\pm 1)}{|\alpha| = 1}$, non si può dire nulla sulla stabilità di $X_{eq,1}$ utilizzando il metodo indiretto di Lyapunov.

- $A_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X = X_{eq,2} \\ u = u_{eq}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ * & 2-\alpha \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ forma triangolare inferiore

↳ gli autovalori di $A_{lin,2}$ sono: $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = 2-\alpha$ (<u>di immediata lettura</u>)

Dato che $|\lambda_1|<1$, risulta:

- se $\underset{(1<\alpha<3)}{|\lambda_2| = |2-\alpha| < 1}$, il punto di equilibrio $x_{eq,2}$ è asintoticamente stabile
- se $\underset{(\alpha<1 \text{ o } \alpha>3)}{|\lambda_2| = |2-\alpha| > 1}$, " " " " " instabile.
- se $\underset{(\alpha=1 \text{ o } \alpha=3)}{|\lambda_2| = |2-\alpha| = 1}$, non si può dire nulla sulla stabilità di $x_{eq,2}$ utilizzando il metodo indiretto di Lyapunov.

Esercizio 3

a) $$W(s) = Q(s)\frac{P(s)}{1+k_H P(s)} = \frac{1}{s+1}\,\frac{\frac{s+8}{s(s-2)}}{1+k_H\frac{s+8}{s(s-2)}} =$$

$$= \frac{1}{s+1}\,\frac{s+8}{s(s-2)+k_H(s+8)} = \frac{s+8}{(s+1)\left[s^2+(k_H-2)s+8k_H\right]}$$

I poli di $W(s)$ sono -1 e le radici del trinomio $s^2+(k_H-2)s+8k_H$, il quale ha tutte radici con parte reale negativa se e solo se

$$\begin{cases} k_H-2>0 \\ 8k_H>0 \end{cases} \text{(tutte permanenze)} \Rightarrow \begin{cases} k_H>2 \\ k_H>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k_H>2}$$

Condizione per la stabilità ILUL di $W(s)$

b) $u(t) \equiv$ gradino unitario $\Rightarrow$ $U(s) = \frac{1}{s}$

$$W(s)\Big|_{k_H=2} = \frac{s+8}{(s+1)(s^2+16)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s+8}{(s+1)(s^2+16)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{s+8}{s(s+1)(s^2+16)}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+16}$$

con

$$A = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+8}{(s+1)(s^2+16)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s\to -1} (s+1)Y(s) = \lim_{s\to -1} \frac{s+8}{s(s^2+16)} = -\frac{7}{17}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-\frac{7}{17}}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+16} = \dots =$$

imponendo l'identità

$$= \frac{\left(C+\frac{3}{34}\right)s^3 + \left(C+D+\frac{1}{2}\right)s^2 + \left(D+\frac{24}{17}\right)s+8}{s(s+1)(s^2+16)} = \frac{s+8}{s(s+1)(s^2+16)}$$

$$\begin{cases} C+\frac{3}{34}=0 & \Rightarrow \quad C=-\frac{3}{34} \\ C+D+\frac{1}{2}=0 & \\ D+\frac{24}{17}=1 & \Rightarrow \quad D=-\frac{7}{17} \\ 8=8 & \checkmark \end{cases}$$

(verifica)

$$\Rightarrow -\frac{3}{34}-\frac{7}{17}+\frac{1}{2} = -\frac{\cancel{17}^{\,1}}{\cancel{34}_{\,2}}+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{7}{17}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{34}\frac{s}{s^2+16} - \frac{7}{68}\frac{4}{s^2+16}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{7}{17}e^{-t} - \frac{3}{34}\cos(4t) - \frac{7}{68}\sin(4t)\right]\mathbb{1}(t)$$

c)

$$W(s)\Big|_{k_H=3} = \frac{s+8}{(s+1)\underbrace{(s^2+s+24)}_{\Delta<0 \Rightarrow \text{ radici complesse}}} = \frac{8}{24}\frac{1+\frac{s}{8}}{(1+s)\left(1+\frac{s}{24}+\frac{s^2}{24}\right)} =$$

$$= k_b \frac{1+\tau_2 s}{(1+\tau_1 s)\left(1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

dove $k_b = \frac{1}{3} \Rightarrow |k_b|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -9.5424\ dB$

$\tau_1 = 1$

$\tau_2 = \frac{1}{8}$

$\omega_n = \sqrt{24} \simeq 4.8990 \Rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{24}\right)\frac{\omega_n}{2} = \frac{1}{24}\,\frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{24}} \simeq 0.1021$

I punti di rottura dei diagrammi sono $\frac{1}{\tau_1} = 1$, $\omega_n = \sqrt{24}$, $\frac{1}{\tau_2} = 8$