COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 17.07.2006

Candidato: N. Matricola:

I parte – Esercizio 1.

Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dall'equazione di stato

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -(\alpha+1) & -2 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t) \triangleq A\,\mathrm{x}(t)$$

dove $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$ è lo stato, e α è un parametro reale.

1. Si studino la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro α.
2. Posto $\alpha = 1$, si calcoli la risposta libera del sistema con condizione iniziale $\mathrm{x}_0 = [\ 0\ -1\ 1\ ]^T$. Quali modi sono eccitati da x_0?
3. Si determini, se possibile, una matrice $C = [\ c_1\ c_2\ c_3\ ]$ tale che, posto $y(t) = C\,\mathrm{x}(t)$, gli eventuali modi instabili del sistema non siano osservabili nell'uscita $y(t)$.

I parte – Esercizio 2.

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -2\,x_1^2(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) &= 3\,x_1(k) - 2\,x_2(k) + u(k) \end{aligned}$$

dove $\mathrm{x} = [\ x_1\ x_2\ ]^T \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, e $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso.

1. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio del sistema per $u(k) = 0$.
2. Posto $u(k) = K\,\mathrm{x}(k)$, con $K = [\ k_1\ k_2\ ]$, si determini la matrice K, se possibile, in maniera tale che l'origine sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile del sistema.

II parte – Esercizio 3.

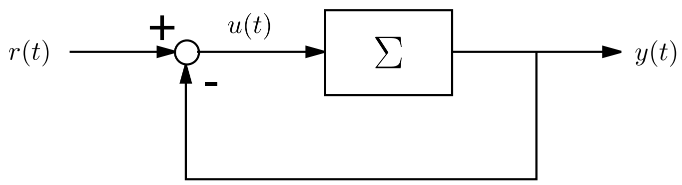
Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$

$$W(s) = \frac{s^2+4}{s\left(s^2 + \frac{41}{5}\,s + \frac{8}{5}\right)}\,.$$

1. Si scriva l'equazione differenziale che descrive il legame tra $y(t)$ e $u(t)$.
2. Si traccino i diagrammi di Bode di $W(\jmath\omega)$.
3. Si calcoli la risposta a regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(2\,t) \cdot 1(t)$.

II parte – Esercizio 4.

Si consideri lo schema a blocchi in figura.



dove il sistema lineare stazionario a tempo continuo Σ è descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -(k+1)\,x_1(t) + (4-k)\,x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= -2\,x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

e k è un parametro reale.

1. Si scrivano le funzioni di trasferimento $W(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$ e $S(s) = \dfrac{U(s)}{R(s)}$.
2. Si determinino i valori di k per cui la funzione di trasferimento $W(s)$ è ILUL stabile.
3. Posto $r(t) = e^{a\,t}\,1(t)$, con $a > 0$, si determinino a e k in modo tale che
$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0\,.$$
4. Posto $k = 3$ e $r(t) = \left[1 + e^{-2\,t}\right]\,1(t)$, si calcoli la risposta forzata $u(t)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

1)
$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 1+\alpha & 2 \\ 0 & \lambda+(1-\alpha) & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda+2)\det\begin{bmatrix} \lambda+(1-\alpha) & 0 \\ 2 & \lambda+2 \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} 1+\alpha & 2 \\ \lambda+(1-\alpha) & 0 \end{bmatrix} =$$

sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna

$$= [\lambda+(1-\alpha)](\lambda+2)^2 - 4[\lambda+(1-\alpha)] = [\lambda+(1-\alpha)](\lambda^2+4\lambda+\cancel{4}-\cancel{4})$$

$$= \lambda(\lambda+4)[\lambda+(1-\alpha)]$$

Gli autovalori di A sono dunque:

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -4$

$\lambda_3 = \alpha - 1$

CASO $\alpha > 1$

Risulta $\lambda_3 > 0$ e il sistema è INSTABILE.
Gli autovalori di A sono tutti distinti, dunque A è diagonalizzabile, e i modi del sistema sono:

$$\underset{\text{(limitato)}}{e^{\lambda_1 t} \equiv 1}, \quad \underset{\text{(convergente)}}{e^{\lambda_2 t} \equiv e^{-4t}}, \quad \underset{\text{(divergente)}}{e^{\lambda_3 t} \equiv e^{(\alpha-1)t}}.$$

CASO $\alpha = 1$

Abbiamo $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. L'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica uguale a 2. Verifichiamo la molteplicità geometrica:

$$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 1$$

molteplicità geometrica di $\lambda_1 = \dim\left(\ker(A-\lambda_1 I)\right) = 3-1 = 2$

Dato che $\lambda_2<0$, e $\lambda_1=0$ ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, il sistema è (SEMPLICEMENTE) STABILE. A è inoltre diagonalizzabile, e i modi del sistema sono:

tutti gli autovalori hanno molt. geom. = molt. alg.

$$\underset{\text{(limitato)}}{e^{\lambda_1 t} \equiv 1}, \quad \underset{\text{(convergente)}}{e^{\lambda_2 t} \equiv e^{-4t}}.$$

CASO $\alpha<1$

Risulta $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$, e $\lambda_1=0$ ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica (entrambe pari a 1). Dunque il sistema è (SEMPLICEMENTE) STABILE.

Per quanto riguarda i modi del sistema, occorre analizzare distintamente i casi $\alpha\neq-3$ e $\alpha=-3$.

Se $\alpha\neq-3$, gli autovalori sono tutti distinti, A è diagonalizzabile, e i modi sono:

$$\underset{\text{(limitato)}}{e^{\lambda_1 t} \equiv 1}, \quad \underbrace{e^{\lambda_2 t} \equiv e^{-4t}, \quad e^{\lambda_3 t} \equiv e^{(\alpha-1)t}}_{\text{(convergenti)}}.$$

Se $\alpha=-3$ allora $\lambda_2=\lambda_3=-4$, e quindi l'autovalore $\lambda_2=-4$ ha molteplicità algebrica uguale a 2. Verifichiamo la molteplicità geometrica:

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 1$$

molteplicità geometrica di $\lambda_2 = \dim\left(\ker(A-\lambda_2 I)\right) = 3-1 = 2$

Dato che sia λ_1 che λ_2 hanno molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, A è diagonalizzabile, e i modi del sistema sono:

$$\underset{\text{(limitato)}}{e^{\lambda_1 t} \equiv 1}, \quad \underset{\text{(convergente)}}{e^{\lambda_2 t} \equiv e^{-4t}}.$$

2) Posto $\alpha = 1$, risulta:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \text{ e gli autovalori di } A \text{ sono } \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = -4.$$

Osserviamo che

$$A x_0 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

e quindi x_0 è un punto di equilibrio del sistema.

Dunque, banalmente:

$$x(t) = x_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Il modo $e^{\lambda_1 t} \equiv 1$ è l'unico eccitato da x_0.

3) Consideriamo $\alpha > 1$ (altrimenti non ci sono modi instabili).

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = \alpha - 1$, tutti distinti.

Detti v_1, v_2, v_3 tre autovettori di A relativi, rispettivamente, a λ_1, λ_2 e λ_3, la risposta generica nello stato può essere scritta come

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} v_3$$

dove $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono le coordinate della condizione iniziale x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Risulta poi:

$$y(t) = Cx(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} C v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} C v_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} C v_3.$$

Il modo instabile $e^{\lambda_3 t} \equiv e^{(\alpha-1)t}$ non è osservabile nell'uscita $y(t)$ se e solo se

$$\boxed{C v_3 = 0}$$

Occorre dunque calcolare un autovettore relativo a λ_3.

$$A-\lambda_3 I = \begin{bmatrix} -(\alpha+1) & -(\alpha+1) & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -(\alpha+1) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\alpha+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha+1) & -(\alpha+1) & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\alpha+1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sistema omogeneo: } \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{\alpha+1}{2} x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{Posto } x_2 = -1: \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$C v_3 = 0 \quad \text{se solo se} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}^{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 - c_2 = 0}$$

condizione che deve rispettare la matrice C affinché il modo instabile non sia osservabile in $y(t)$.

ESERCIZIO 2

1) Il sistema è nella forma:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove $f(x,u) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 + u \end{bmatrix}$.

I punti di equilibrio del sistema si determinano risolvendo:

$$x = f(x,u)$$

con $u = u_{eq} = 0$.

$$\begin{cases} -2x_1^2 + x_2 = x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha un unico punto di equilibrio:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -4x_1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow p_{A_{lin}}(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -3 & \lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+2)-3$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda-1)(\lambda+3)$$

Gli autovalori di A_{lin} sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$. Dato che $|\lambda_2| > 1$, il punto di equilibrio x_{eq} e' INSTABILE.

2) $u(k) = Kx(k) = [k_1 \ \ k_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k)$.

Sostituendo:

$$x_1(k+1) = -2x_1^2(k) + x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = (3+k_1)x_1(k) + (-2+k_2)x_2(k)$$

Il sistema e' nella forma:

$$x(k+1) = g(x(k))$$

dove $g(x) = \begin{bmatrix} -2x_1^2 + x_2 \\ (3+k_1)x_1 + (-2+k_2)x_2 \end{bmatrix}$.

E' facile verificare che $x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e' ancora punto di equilibrio del sistema, perche' soddisfa $x = g(x)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} -4x_1 & 1 \\ 3+k_1 & -2+k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{lin} = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=x_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3+k_1 & -2+k_2 \end{bmatrix}$$

È immediato osservare che, ponendo per esempio:

$$\begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 2 \end{cases}$$

la matrice A_{lin} ha entrambi gli autovalori in $\lambda = 0$, e quindi x_{eq} risulta un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3

1) $$W(s) = \frac{s^2+4}{s^3 + \frac{41}{5}s^2 + \frac{8}{5}s}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{41}{5}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{8}{5}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 4u(t).$$

2) Verifichiamo se il trinomio $s^2 + \frac{41}{5}s + \frac{8}{5}$ ha radici reali o complesse.

$$\Delta = \frac{1681}{25} - \frac{32}{5} = \frac{1521}{25}$$

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{41}{5} \pm \frac{39}{5}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ -8 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad s^2 + \frac{41}{5}s + \frac{8}{5} = \left(s+\frac{1}{5}\right)(s+8)$$

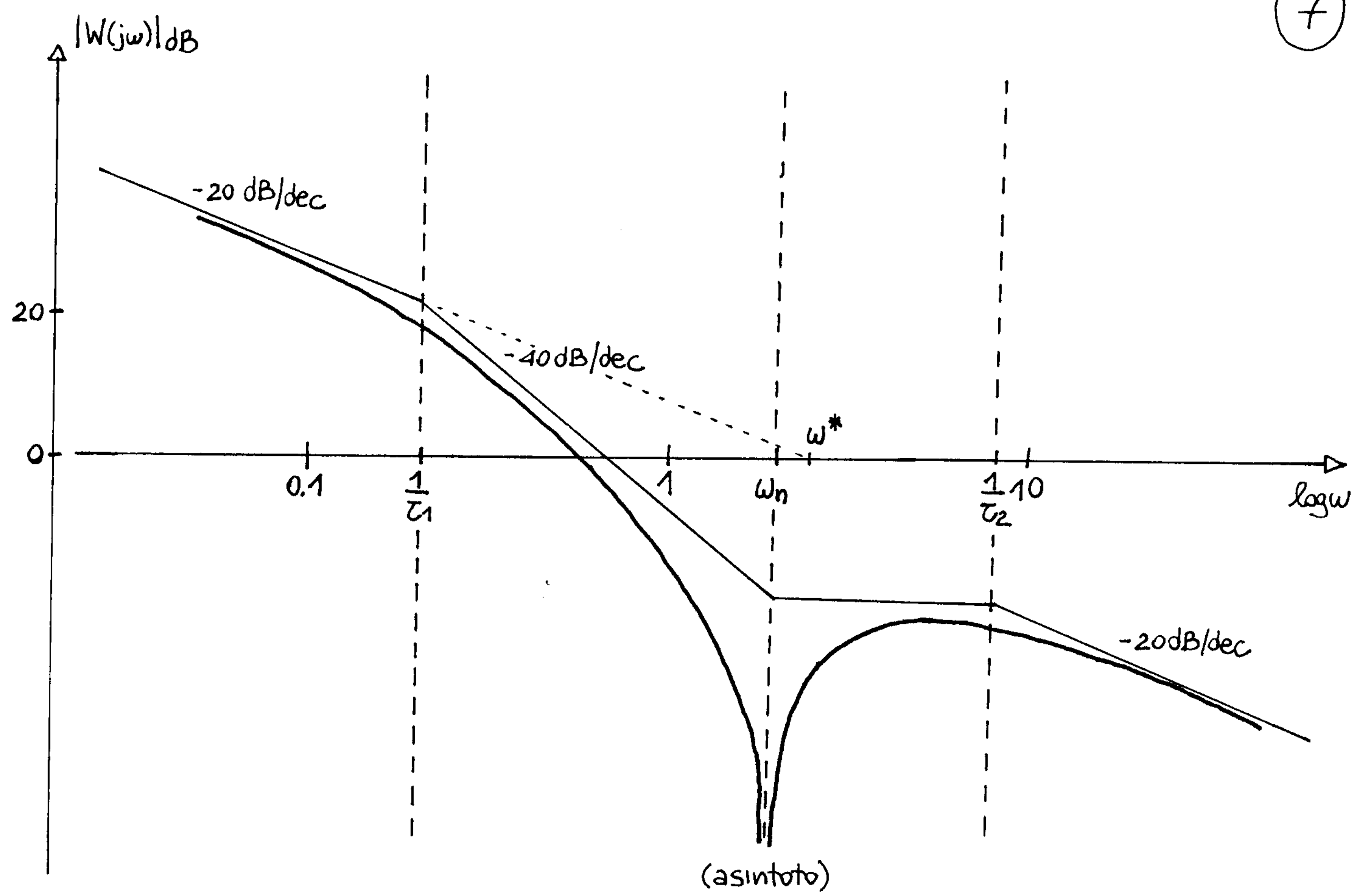
$$\Longrightarrow W(s) = \frac{s^2+4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)(s+8)} = \frac{4}{\frac{1}{5}\cdot 8}\,\frac{1+\frac{s^2}{4}}{s(1+5s)\left(1+\frac{s}{8}\right)} =$$

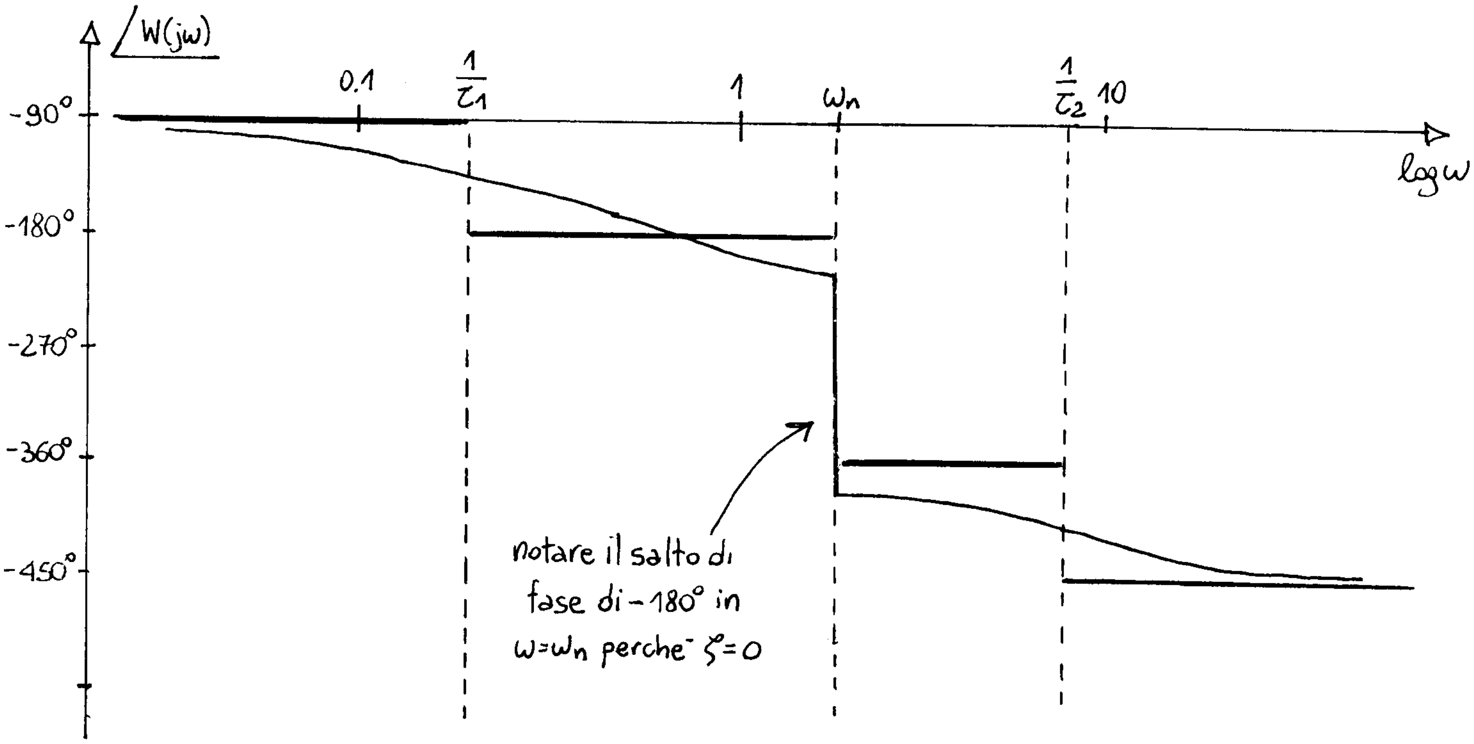
$$= \frac{k_b}{s}\,\frac{1+\frac{s^2}{\omega_n^2}}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$

dove $k_b = \frac{5}{2}$, $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = \frac{1}{8}$, $\omega_n = 2$.

$$\left|\frac{k_b}{s}\right|_{s=j\omega^*} = 1 \iff \omega^* = |k_b| = \frac{5}{2} = 2.5$$

punti di rottura: $\frac{1}{\tau_1} = 0.2$, $\omega_n = 2$, $\frac{1}{\tau_2} = 8$.





3) $u(t)=\sin(2t)\cdot 1(t) \Rightarrow U(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$

$$\Rightarrow Y(s)=W(s)U(s)=\frac{\cancel{s^2+4}}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)(s+8)}\,\frac{2}{\cancel{s^2+4}}=\frac{2}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)(s+8)}$$

La risposta a regime permanente è dovuta solo al <u>polo nell'origine</u> di $Y(s)$! Applicando il teorema del valor finale:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{2}{\cancel{s}\left(s+\frac{1}{5}\right)(s+8)} = \frac{2}{\frac{1}{5}\cdot 8} = \frac{5}{4}.$$

ESERCIZIO 4

Il sistema Σ è nella forma:

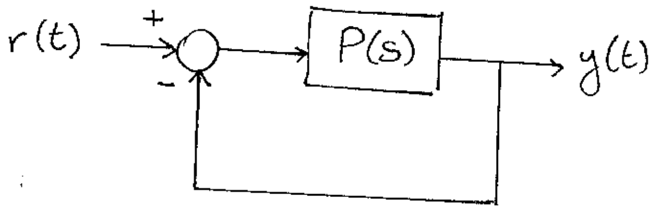
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k+1) & 4-k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$.

La funzione di trasferimento del sistema è:

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B = \ldots = \frac{s-2}{s^2+(k-4)s+(k+1)}$$

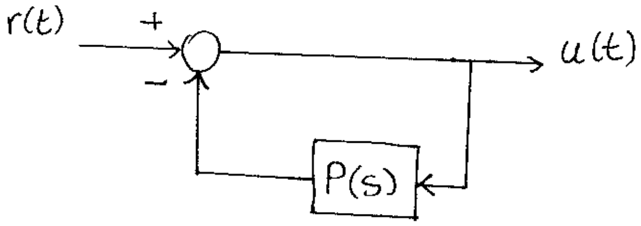
1) Per calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$:



retroazione negativa $\Rightarrow$ $W(s) = \dfrac{P(s)}{1+P(s)} = \dfrac{s-2}{s^2+(k-4)s+(k+1)+(s-2)}$

$$= \frac{s-2}{s^2+(k-3)s+(k-1)}$$

Per calcolare la funzione di trasferimento $S(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$:



retroazione negativa $\Rightarrow S(s) = \frac{1}{1+P(s)} = \frac{s^2+(k-4)s+(k+1)}{s^2+(k-3)s+(k-1)}$

2) $W(s)$ è ILUL stabile se e solo se ha tutti i poli con parte reale negativa. Essendo il polinomio a denominatore di $W(s)$ di secondo grado, condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è:

$$\left.\begin{array}{l} k-3>0 \iff k>3 \\ k-1>0 \iff k>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k>3}$$

3) $r(t) = e^{at} \cdot 1(t)$ con $a>0$.

$$\Rightarrow R(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$Y(s) = W(s)R(s) = \frac{s-2}{s^2+(k-3)s+(k-1)} \frac{1}{s-a}$$

Si ha che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ se e solo se tutti i poli di $Y(s)$ hanno parte reale negativa. I poli relativi al trinomio $s^2+(k-3)s+(k-1)$ hanno parte reale negativa se e solo se $\underline{k>3}$. Il polo relativo al binomio $s-a$ è invece positivo (perché $a>0$), e deve dunque cancellarsi con uno zero. Questo avviene se e solo se $\underline{a=2}$. Dunque:

$$\begin{cases} a=2 \\ k>3 \end{cases}$$

4) Con $k=3$:

$$S(s) = \frac{s^2 - s + 4}{s^2+2}$$

Inoltre:

$$r(t) = \left[1 + e^{-2t}\right] \mathbb{1}(t) \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+2}{s(s+2)}$$

$$\Rightarrow U(s) = S(s)R(s) = \frac{2s^3+6s+8}{s(s+2)(s^2+2)} =$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2}$$

$$A = \lim_{s\to 0} sU(s) = 2$$

$$B = \lim_{s\to -2} (s+2)U(s) = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{2}{s} + \frac{5/3}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2} =$$

$$= \frac{\left(C+\frac{11}{3}\right)s^3 + \left(2C+D+4\right)s^2 + \left(2D+\frac{22}{3}\right)s + 8}{s(s+2)(s^2+2)}$$

Uguagliando i coefficienti a numeratore di $U(s)$:

$$\begin{cases} C + \frac{11}{3} = 2 & \Rightarrow C = -\frac{5}{3} \\ 2C+D+4 = 0 & \\ 2D + \frac{22}{3} = 6 & \Rightarrow D = -\frac{2}{3} \\ 8 = 8 \quad \underline{\text{ok}} & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (verifica) $2\left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} + 4 = -\frac{12}{3} + 4 = 0$

Dunque: $U(s) = 2\cdot\frac{1}{s} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s+2} - \frac{5}{3}\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}$

e antitrasformando: $u(t) = \left[2 + \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{5}{3}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin(\sqrt{2}t)\right]\mathbb{1}(t)$.