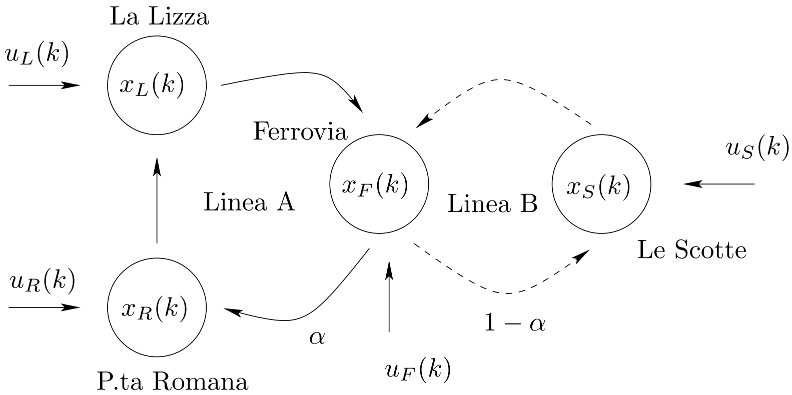
COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 05.07.2006

Candidato: N. Matricola:

I parte – Esercizio 1.

La realizzazione della rete senese di trasporto metropolitano risolverà finalmente il problema di raggiungere facilmente gli istituti universitari con i mezzi pubblici. Il progetto si compone di due linee A e B e di quattro stazioni: Ferrovia (F), Porta Romana (R), La Lizza (L), Le Scotte (S) (vedi figura). Il transito dei treni avviene nel senso delle frecce, ad istanti di tempo cadenzati $k = 0, 1, \ldots,$ ad esempio ogni 5 minuti. Siano $x_F(k), x_R(k), x_L(k), x_S(k)$ il numero di passeggeri presenti in ciascuna delle stazioni all'istante k. Ad ogni passaggio dei treni, una frazione α dei passeggeri in transito dalla stazione Ferrovia prosegue lungo la linea A, mentre una frazione $1-\alpha$ prosegue lungo la linea B. Siano $u_F(k), u_R(k), u_L(k), u_S(k)$ il numero di passeggeri che dall'esterno entrano nelle rispettive stazioni all'istante k (i valori si intendono con segno: ogni passeggero che entra conta $+1$, ogni passeggero che esce conta -1).

Si assuma $\alpha = 3/4$.



1. Determinare un modello lineare stazionario a tempo discreto del sistema (di ordine 4), assumendo come variabili di stato il numero di passeggeri presenti in ciascuna delle quattro stazioni e come ingressi il numero di passeggeri che entrano in ogni stazione, ovvero

$$x(k) = [x_F(k)\ x_R(k)\ x_L(k)\ x_S(k)]' \quad ; \quad u(k) = [u_F(k)\ u_R(k)\ u_L(k)\ u_S(k)]'$$

2. Verificare che il modello ottenuto è semplicemente stabile e che l'evoluzione libera di ciascuna delle variabili di stato a partire da una generica condizione iniziale tende ad un valore costante.

3. Si supponga che venga (ahimé) rimossa la stazione di porta Romana: mostrare che il sistema che descrive la nuova situazione (di ordine 3) è ancora semplicemente stabile, ma che in generale non è più vero che la risposta libera tende ad un valore costante qualunque sia la condizione iniziale.

I parte – Esercizio 2.

Sia dato il sistema a tempo continuo del primo ordine:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + (1 + \beta x^2(t))u(t)$$

dove β è un parametro reale. Si assuma $u(t) = 2\ \forall t$.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di β.

2. Studiare se possibile la stabilità dei punti di equilibrio del sistema nel caso $\beta = 0$ e nel caso $\beta = \frac{1}{2}$.

II parte – Esercizio 3.

Dato il sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 - s/4}{s[1 + (2\zeta/4)s + s^2/16]}$$

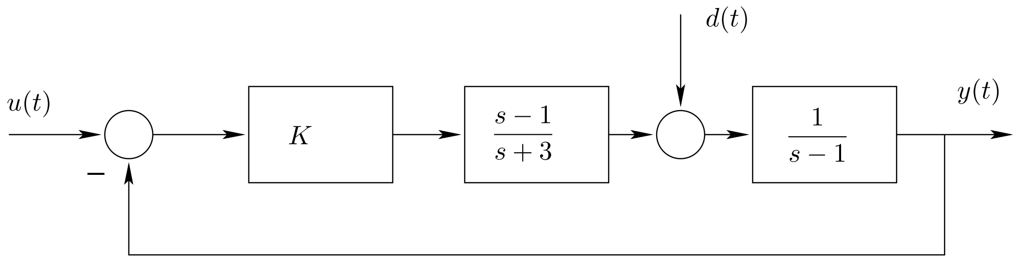
1. Tracciare i diagrammi di Bode di $G(j\omega)$ nel caso $\zeta = 1/2$ e nel caso $\zeta = \sqrt{2}$.
2. Determinare per quali valori di ζ e ω_0 la risposta forzata del sistema all'ingresso

$$u(t) = \cos(\omega_0 t)$$

   è non limitata.

II parte – Esercizio 4.

Si consideri lo schema a blocchi in figura.



1. Determinare, se esistono, i valori di K per cui la funzione di trasferimento $W(s) = Y(s)/U(s)$ è ILUL stabile.
2. Determinare, se esistono, i valori di K per cui la funzione di trasferimento $V(s) = Y(s)/D(s)$ è ILUL stabile.
3. Determinare K in modo che la risposta forzata del sistema agli ingressi $u(t) = 0$ e $d(t) = 1(t)$ (gradino unitario) contenga il modo e^{-4t}, e calcolare $y(t)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

Domanda 1.

Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x_F(k+1) &= x_L(k) + x_S(k) + u_F(k) \\
x_R(k+1) &= \alpha\, x_F(k) + u_R(k) \\
x_L(k+1) &= x_R(k) + u_L(k) \\
x_S(k+1) &= (1-\alpha)\, x_F(k) + u_S(k)
\end{aligned}$$

che, seguendo la definizione del vettore di stato $\mathbf{x}$ e del vettore degli ingressi $\mathbf{u}$ suggerita nel testo, possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{x}(k+1) = A\,\mathbf{x}(k) + B\,\mathbf{u}(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Domanda 2.

Il polinomio caratteristico della matrice A è $p_A(\lambda) = \det(\lambda\, I - A)$, dove

$$\lambda\, I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 & -1 \\ -\alpha & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ \alpha-1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il calcolo del determinante rispetto all'ultima colonna:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\alpha & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ \alpha-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -\alpha & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= (\alpha-1) \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} + \lambda \left\{ \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -\alpha & \lambda \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= (\alpha-1)\,\lambda^2 + \lambda\,(\lambda^3 - \alpha) \\
&= \lambda\,(\lambda^3 + (\alpha-1)\,\lambda - \alpha) \\
&= \lambda\,(\lambda^3 - \frac{1}{4}\,\lambda - \frac{3}{4}).
\end{aligned}$$

Sfruttando l'informazione fornita dal testo, cioè che l'evoluzione libera di ciascuna delle variabili di stato tende ad un valore costante (e quindi, a tempo discreto, $\lambda = 1$ deve essere autovalore di A), proviamo a verificare se $\lambda = 1$ è radice di $\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{4}$:

$$\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{4}\Big|_{\lambda=1} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0\,.$$

Abbassiamo di grado applicando il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & & 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ \hline & 1 & 1 & \frac{3}{4} & // \end{array}$$

Dunque,

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{4})\,.$$

Il fattore di secondo grado ha radici complesse $\lambda = \dfrac{-1 \pm \jmath\sqrt{2}}{2}$, e quindi gli autovalori del sistema sono

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0\\ \lambda_2 &= 1\\ \lambda_3 &= \frac{-1 + \jmath\sqrt{2}}{2}\\ \lambda_4 &= \lambda_3^* = \frac{-1 - \jmath\sqrt{2}}{2}\,.\end{aligned}$$

Si osservi che $|\lambda_3| = |\lambda_4| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Dunque, tutti gli autovalori di A hanno **modulo** minore o uguale a 1, e l'autovalore con modulo uguale a 1 ha la molteplicità geometrica uguale a quella algebrica (in particolare entrambe uguali a 1). Quindi il sistema è (semplicemente) stabile.
Dato che la matrice A ha tutti autovalori distinti, essa è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$, perché ha due autovalori complessi), e quindi la risposta libera $\mathbf{x}(k) = A^k\,\mathbf{x}_0$ può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}(k) = \alpha_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 + \alpha_3\,\lambda_3^k\,\mathbf{v}_3 + \alpha_4\,\lambda_4^k\,\mathbf{v}_4$$

dove $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sono autovettori di A relativi a λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4, rispettivamente, e α_1, α_2, α_3 e α_4 sono le coordinate di $\mathbf{x}_0$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ di $\mathbb{C}^4$. Dato che:

$$\begin{aligned}&\lambda_1^k = 0^k = 0 \text{ per } k = 1, 2, 3, \ldots\\ &\lambda_2^k = 1^k = 1 \text{ per ogni } k\\ &\lambda_3^k \to 0 \text{ per } k \to \infty \text{ perché } |\lambda_3| < 1\\ &\lambda_4^k \to 0 \text{ per } k \to \infty \text{ perché } |\lambda_4| < 1\end{aligned}$$

risulta

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}(k) = \alpha_2\, \mathbf{v}_2\,.$$

Quindi l'evoluzione libera di ciascuna delle variabili di stato a partire da una generica condizione iniziale tende ad un valore costante.

Domanda 3.

Rimuovendo la stazione di Porta Romana, la frazione α di passeggeri che riparte dalla stazione Ferrovia arriva direttamente alla stazione La Lizza. Dunque il nuovo sistema è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_F(k+1) &= x_L(k) + x_S(k) + u_F(k) \\ x_L(k+1) &= \alpha\, x_F(k) + u_L(k) \\ x_S(k+1) &= (1-\alpha)\, x_F(k) + u_S(k) \end{aligned}$$

che, seguendo la definizione del vettore di stato $\mathbf{x}$ e del vettore degli ingressi $\mathbf{u}$ suggerita nel testo, possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{x}(k+1) = A\,\mathbf{x}(k) + B\,\mathbf{u}(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice A è $p_A(\lambda) = \det(\lambda\, I - A)$, dove

$$\lambda\, I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -\alpha & \lambda & 0 \\ \alpha-1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il calcolo del determinante rispetto all'ultima colonna:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\det \begin{bmatrix} -\alpha & \lambda \\ \alpha-1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\alpha & \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\alpha-1)\,\lambda + \lambda\,(\lambda^2-\alpha) \\ &= \lambda\,(\lambda^2-1) \\ &= \lambda\,(\lambda-1)(\lambda+1)\,. \end{aligned}$$

Gli autovalori del sistema sono

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

Dunque, tutti gli autovalori di A hanno **modulo** minore o uguale a 1, e gli autovalori con modulo uguale a 1, hanno la molteplicità geometrica uguale a quella algebrica (in particolare entrambe uguali a 1). Quindi il sistema è (semplicemente) stabile.
Dato che la matrice A ha tutti autovalori distinti, essa è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$, perché ha tutti autovalori reali), e quindi la risposta libera $\mathbf{x}(k) = A^k\,\mathbf{x}_0$ può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}(k) = \alpha_1\,\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + \alpha_2\,\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 + \alpha_3\,\lambda_3^k\,\mathbf{v}_3$$

dove $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$sono autovettori di A relativi a λ_1, λ_2 e λ_3, rispettivamente, e α_1, α_2 e α_3 sono le coordinate di $\mathbf{x}_0$ rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Dato che:

$$\begin{aligned}&\lambda_1^k = 0^k = 0 \text{ per } k = 1, 2, 3, \ldots\\&\lambda_2^k = 1^k = 1 \text{ per ogni } k\end{aligned}$$

ma $\lambda_3^k = (-1)^k$ oscilla tra $+1$ e -1, in generale non è più vero che la risposta libera tende ad un valore costante qualunque sia la condizione iniziale. In particolare, se $\alpha_3 \neq 0$, il limite non esiste.

Esercizio 2.

<u>*Domanda 1.*</u>

Il sistema è nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ e $f(x, u) = -2\,x + (1 + \beta\,x^2)\,u$.
Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 2$, si risolve il sistema

$$\boxed{f(x, u) = 0}$$

cioè

$$-2\,x + (1 + \beta\,x^2)\,u = 0$$

con $u \triangleq u_{eq} = 2$. Si ha dunque

$$-2\,x + 2\,(1 + \beta\,x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta\,x^2 - x + 1 = 0.$$

Se $\beta = 0$, l'equazione fornisce l'unico punto di equilibrio $x_{eq,1} = 1$. Se $\beta \neq 0$, allora il calcolo del Δ del polinomio di secondo grado fornisce

$$\Delta = 1 - 4\,\beta\,.$$

Imponendo $\Delta \geq 0$ (perché punti di equlibrio complessi <u>non</u> vanno tenuti in considerazione), risulta che il sistema non ha punti di equilibrio se $\beta > \frac{1}{4}$. Se $\beta = \frac{1}{4}$, il polinomio ha due radici coincidenti, e quindi il sistema ha un unico punto di equilibrio in $x_{eq,1} = 2$. Se $\beta < \frac{1}{4}$ (ma $\beta \neq 0$), allora il sistema ha due punti di equilibrio in

$$
\begin{aligned}
x_{eq,1} &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4\,\beta}}{2\,\beta} \\
x_{eq,2} &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\,\beta}}{2\,\beta}.
\end{aligned}
$$

<u>Domanda 2.</u>

Se $\beta = 0$, il sistema è lineare. Infatti risulta

$$\dot{x}(t) = -2\,x(t) + u(t) = a\,x(t) + u(t)$$

con $a = -2$ ("matrice A" del sistema). Dato che $a < 0$, il punto di equilibrio $x_{eq,1} = 1$ (calcolato in precedenza con $u(t) = 2$) è asintoticamente stabile.

Se $\beta = \frac{1}{2}$, il sistema non ha punti di equilibrio, in quanto $\beta > \frac{1}{4}$.

Esercizio 3.

<u>Domanda 1.</u>

Se $\zeta = \frac{1}{2}$, il termine trinomio a denominatore ha radici complesse coniugate ($|\zeta| < 1$), e la funzione di trasferimento $G(s)$ è già in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{\left(1 - \dfrac{s}{4}\right)}{s\left(1 + \dfrac{s}{4} + \dfrac{s^2}{16}\right)} = \frac{k_b}{s^h} \frac{(1 - \tau\,s)}{\left(1 + \dfrac{2\,\zeta}{\omega_n}\,s + \dfrac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

dove $k_b = 1$, $h = 1$, $\tau = \frac{1}{4}$, $\omega_n = 4$, $\zeta = \frac{1}{2}$. I diagrammi di Bode di $G(\jmath\omega)$ hanno un unico punto di rottura in $\frac{1}{\tau} = \omega_n = 4$.

In Figura 1, la linea nera e la linea blu rappresentano, rispettivamente, gli andamenti asintotico e reale dei diagrammi di Bode di modulo e fase di $G(\jmath\omega)$.

Se $\zeta = \sqrt{2}$, il termine trinomio a denominatore ha radici reali ($|\zeta| > 1$), e deve essere scomposto. In particolare, calcolando le radici del trinomio risulta

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,s + \frac{s^2}{16} = \left(1 + \frac{s}{4\,(\sqrt{2}+1))}\right)\left(1 + \frac{s}{4\,(\sqrt{2}-1))}\right)$$

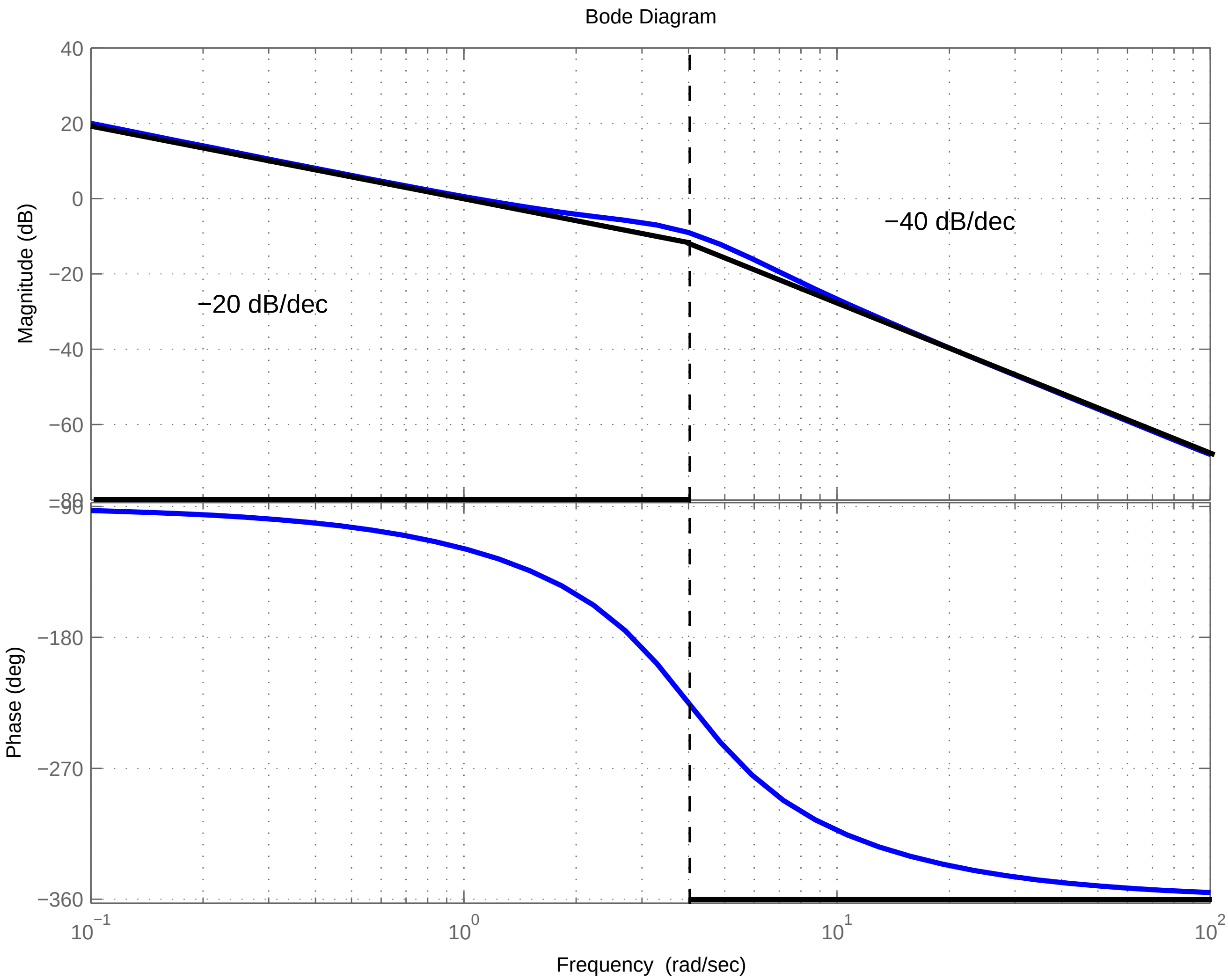


Figura 1. Diagrammi di Bode asintotico e reale di modulo e fase di $G(\jmath\omega)$ con $\zeta = \dfrac{1}{2}$.

e la funzione di trasferimento $G(s)$, scritta ora in forma di Bode, è

$$G(s) = \frac{k_b}{s^h} \frac{(1 - \tau_2\, s)}{(1 + \tau_1\, s)(1 + \tau_3\, s)}$$

dove $k_b = 1$, $h = 1$, $\tau_1 = \dfrac{1}{4\,(\sqrt{2} - 1)} \simeq \dfrac{1}{1.6569}$, $\tau_2 = \dfrac{1}{4}$, e $\tau_3 = \dfrac{1}{4\,(\sqrt{2} + 1)} \simeq \dfrac{1}{9.6569}$. I diagrammi di Bode di $G(\jmath\omega)$ hanno tre punti di rottura in $\dfrac{1}{\tau_1} \simeq 1.6569$, $\dfrac{1}{\tau_2} = 4$ e $\dfrac{1}{\tau_3} \simeq 9.6569$.

In Figura 2, la linea nera e la linea blu rappresentano, rispettivamente, gli andamenti asintotico e reale dei diagrammi di Bode di modulo e fase di $G(\jmath\omega)$.

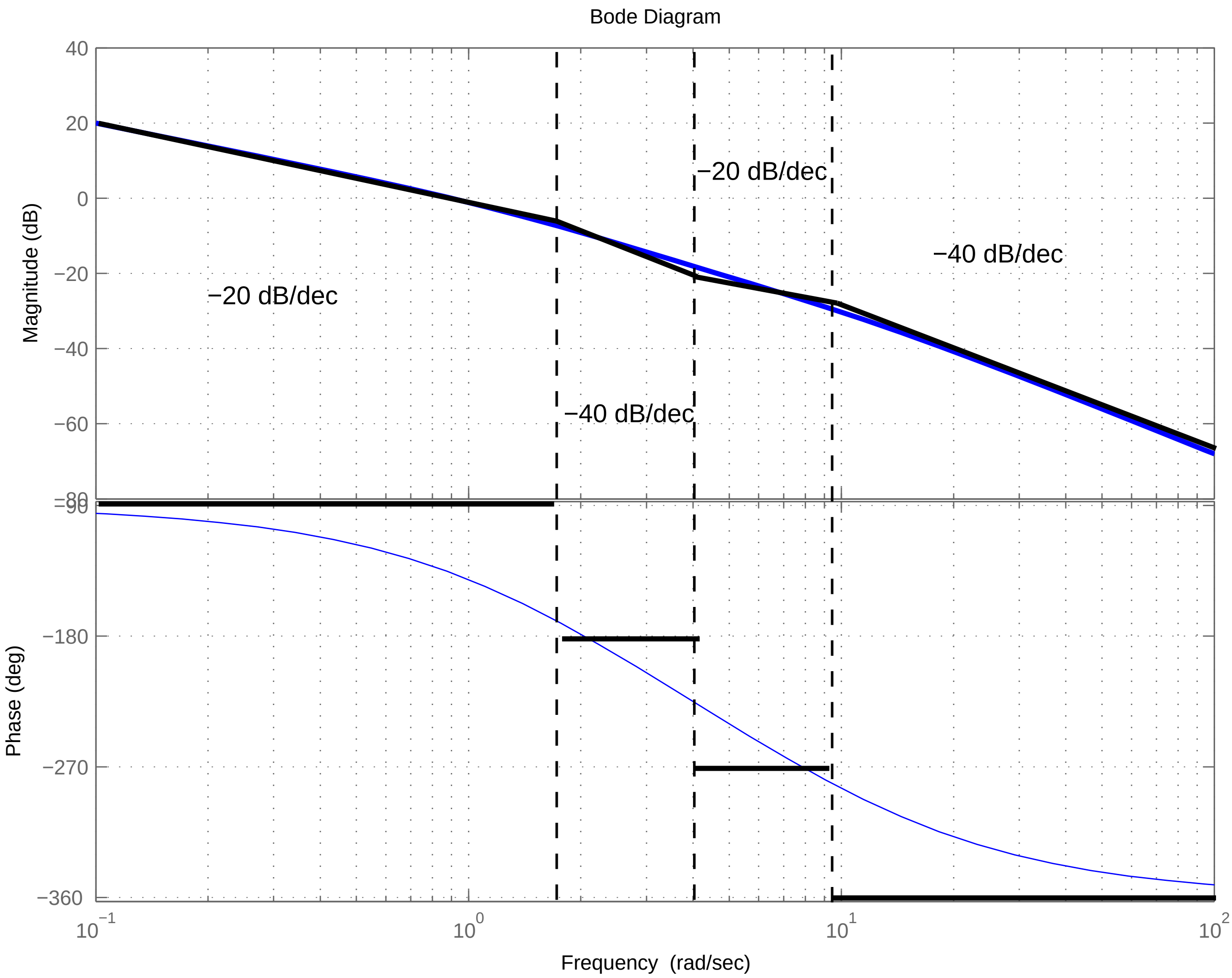


Figura 2. Diagrammi di Bode asintotico e reale di modulo e fase di $G(\jmath\omega)$ con $\zeta = \sqrt{2}$.

Domanda 2.

L'ingresso $u(t) = \cos(\omega_0\, t)\, 1(t)$ ha trasformata di Laplace $U(s) = \dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$. Si osservi come caso particolare che, quando $\omega_0 = 0$, risulta $u(t) = 1(t)$, e quindi $U(s) = \dfrac{1}{s}$. Si ricordi che $Y(s) = G(s)U(s)$. Si osservi innanzi tutto che, se $\zeta < 0$, allora i poli relativi al trinomio a denominatore di $G(s)$ determinano modi non limitati, quando i relativi fratti semplici vengono antitrasformati. Quindi $y(t)$ è non limitata se $\zeta < 0$, indipendentemente dal valore di ω_0. Considerando poi $\zeta \geq 0$, distinguiamo diversi casi:

- Caso $\omega_0 = 0$

  Risulta

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-4(s-4)}{s^2\,(s^2 + 8\,\zeta\, s + 16)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \dots$$

L'antitrasformata del termine $\frac{1}{s^2}$ è una rampa lineare, e quindi $y(t)$ risulta non limitata per ogni valore di ζ.

- <u>Caso $\omega_0 = 4$</u>
  Se $\zeta = 0$, risulta
  $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-4(s-4)}{s(s^2+16)^2}$$
  e i fratti semplici relativi al termine $(s^2+16)^2$ determinano, quando antitrasformati, dei modi del tipo $t\sin(4t)$ e/o $t\cos(4t)$, che non sono limitati. Quindi $y(t)$ risulta non limitata.

  Se $\zeta > 0$, risulta
  $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-4(s-4)}{s\,(s^2+8\,\zeta\,s+16)\,(s^2+16)}$$
  e i fratti semplici relativi a tutti i termini determinano, quando antitrasformati, dei modi convergenti e/o limitati. Quindi $y(t)$ risulta limitata.

- <u>Caso $\omega_0 \neq 0$ e $\omega_0 \neq 4$</u>
  Per $\zeta \geq 0$, risulta
  $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-4(s-4)}{s\,(s^2+8\,\zeta\,s+16)\,(s^2+\omega_0^2)}$$
  e i fratti semplici relativi a tutti i termini determinano, quando antitrasformati, dei modi convergenti e/o limitati. Quindi $y(t)$ risulta limitata.

Esercizio 4.

Il sistema è lineare, e vale la sovrapposizione degli effetti. Quindi

$$Y(s) = W(s)U(s) + V(s)D(s)$$

con condizioni iniziali del sistema nulle.

<u>*Domanda 1.*</u>

Si pone $d(t) = 0$, e quindi il legame tra $u(t)$ a $y(t)$ è rappresentato da una retroazione negativa. Risulta

$$W(s) = \frac{K\,\frac{s-1}{s+3}\,\frac{1}{s-1}}{1+K\,\frac{s-1}{s+3}\,\frac{1}{s-1}} = \frac{K}{s+K+3}\,.$$

La funzione di trasferimento $W(s)$ è ILUL stabile se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa. Dunque si deve verificare

$$K+3>0 \quad \Rightarrow \quad K>-3.$$

Domanda 2.

Si pone $u(t) = 0$, e quindi il legame tra $d(t)$ a $y(t)$ è ancora rappresentato da una retroazione negativa. Risulta

$$V(s) = \frac{\dfrac{1}{s-1}}{1 + K\,\dfrac{s-1}{s+3}\,\dfrac{1}{s-1}} = \frac{s+3}{(s-1)(s+K+3)}\,.$$

La funzione di trasferimento $V(s)$ non è mai ILUL stabile, in quanto ha sempre un polo con parte reale positiva (in $s = 1$).

Domanda 3.

L'ingresso $d(t) = 1(t)$ ha trasformata di Laplace $D(s) = \frac{1}{s}$. Risulta

$$Y(s) = W(s)\underbrace{U(s)}_{=0} + V(s)D(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+K+3)s}\,.$$

Dovendo comparire il modo e^{-4t} in $y(t)$, si impone $K + 3 = 4$, e quindi $K = 1$. Si ottiene

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s+4)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+4}$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+3}{(s-1)(s+4)} = -\frac{3}{4}\\
B &= \lim_{s\to 1}(s-1)\,Y(s) = \lim_{s\to 1} \frac{s+3}{s(s+4)} = \frac{4}{5}\\
C &= \lim_{s\to -4}(s+4)\,Y(s) = \lim_{s\to -4} \frac{s+3}{s(s-1)} = -\frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$Y(s) = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{s} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{20}\,\frac{1}{s+4}$$

e antritrasformando:

$$y(t) = \left[-\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\,e^{t} - \frac{1}{20}\,e^{-4t}\right]\,1(t).$$