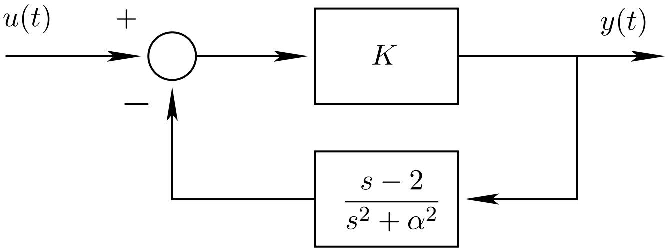
II Prova in Itinere di Fondamenti di Automatica 29.06.2006

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in figura, dove α e K sono parametri reali.



1. Determinare la funzione di trasferimento $W(s) = Y(s)/U(s)$.
2. Determinare per quali valori di α e K il sistema è ILUL stabile.
3. Determinare per quali valori di α e K la risposta forzata in $y(t)$ del sistema all'ingresso sinusoidale $u(t) = \cos(3t)$ tende a zero per $t \to +\infty$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{10\,(s+10)}{(s+0.5)(s^2+0.8\,s+16)}\,.$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(\jmath\omega)$.
2. Spiegare se il Teorema della Risposta in Frequenza è applicabile al sistema descritto da $W(s)$, e in caso affermativo indicare sui diagrammi di Bode l'intervallo di pulsazioni in cui una sinusoide in ingresso viene <u>attenuata</u> di <u>almeno</u> 3 dB.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare stazionario a tempo discreto descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \triangleq \mathbf{A}\,\mathrm{x}(k) + \mathbf{B}\,u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) \triangleq \mathbf{C}\,\mathrm{x}(k). \end{aligned}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $W(z) = Y(z)/U(z)$.
2. Discutere la stabilità asintotica e la stabilità in senso ILUL del sistema.
3. Calcolare la risposta forzata in $y(k)$ corrispondente all'ingresso

$$u(k) = 8\left[\delta_0(k) - \left(-\frac{1}{4}\right)^k \delta_{-1}(k)\right]$$

dove $\delta_0(k)$ e $\delta_{-1}(k)$ denotano l'impulso unitario e il gradino unitario, rispettivamente.

SOLUZIONI

Esercizio 1

1. Si tratta di una connessione in retroazione negativa. Dunque:

$$W(s) = \frac{K}{1+K\frac{s-2}{s^2+\alpha^2}} = \frac{K(s^2+\alpha^2)}{(s^2+\alpha^2)+K(s-2)} = \frac{K(s^2+\alpha^2)}{s^2+Ks+(\alpha^2-2K)}$$

2. Il sistema e' ILUL stabile se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa.

radici del denominatore $s^2+Ks+(\alpha^2-2K)$

polinomio di 2° grado

UN POLINOMIO DI 2° GRADO HA TUTTE LE RADICI CON PARTE REALE NEGATIVA SE E SOLO SE TUTTI I SUOI COEFFICIENTI SONO CONCORDI IN SEGNO.

Dunque:

$$\left.\begin{array}{l} 1>0 \\ K>0 \\ \alpha^2-2K>0 \Rightarrow K<\frac{\alpha^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0<K<\frac{\alpha^2}{2}$$

$\rightarrow$ quindi $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow$ Il sistema e' ILUL stabile per ogni coppia (α, K) tale che:

- $\alpha \neq 0$
- $0<K<\frac{\alpha^2}{2}$

3. $u(t)=\cos(3t) \Rightarrow U(s)=\frac{s}{s^2+9}$

$$Y(s)=W(s)U(s)=\frac{K(s^2+\alpha^2)}{s^2+Ks+(\alpha^2-2K)}\,\frac{s}{s^2+9}$$

Quando si sviluppa $Y(s)$ in fratti semplici, ci sono dei termini che dipendono dai poli di $W(s)$, e a cui corrispondono modi convergenti a 0 se il sistema e' ILUL stabile. (RISPOSTA TRANSITORIA)

C'è poi un termine di RISPOSTA PERMANENTE dovuto all'ingresso cosinusoidale:

$$y_P(t) = |W(i3)| \cos\left(3t + \angle W(i3)\right)$$

[si applica il teorema della risposta in frequenza]

Affinché la risposta forzata completa (cioè risposta transitoria + risposta permanente) tenda a 0 per $t \to \infty$ occorre che la risposta permanente sia identicamente nulla. Si deve cioè imporre:

$$|W(i3)| = 0$$

$$\Rightarrow \quad W(i3) = \frac{K(-9+\alpha^2)}{\dots} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha^2 = 9} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = \pm 3$$

Inoltre deve essere $0 < K < \frac{\alpha^2}{2} = \frac{9}{2}$ affinché il sistema sia ILUL stabile.

OSSERVAZIONE - Si osservi che la condizione trovata corrisponde a cancellare il termine s^2+9 a denominatore di $Y(s)$. Infatti:

$$Y(s) = \frac{K\cancel{(s^2+9)}}{s^2+Ks+(9-2K)} \frac{s}{\cancel{s^2+9}} = \frac{Ks}{s^2+Ks+(9-2K)}$$

cancellazione poli-zeri

Esercizio 2

1. Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

Attenzione - prima si verifichi che il trinomio $s^2+0.8s+16$ non ha radici reali, e quindi non può essere ulteriormente fattorizzato...

$$W(s) = \frac{10 \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 16} \frac{1+\frac{s}{10}}{(1+2s)\left(1+\frac{s}{20}+\frac{s^2}{16}\right)}$$

$$= K_b \frac{1+\tau_2 s}{(1+\tau_1 s)\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

dove:

$K_b = \frac{200}{16} = \frac{25}{2}$

$\tau_1 = 2$

$\tau_2 = 1/10$

$\omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4$

$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{20} \Rightarrow \zeta = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1$

I punti di rottura dei diagrammi sono (in ordine crescente): ③

$\frac{1}{\tau_1} = 0.5$ (polo reale stabile)

$\omega_n = 4$ (poli complessi coniugati stabili)

$\frac{1}{\tau_2} = 10$ (zero reale stabile)

Diagramma del modulo

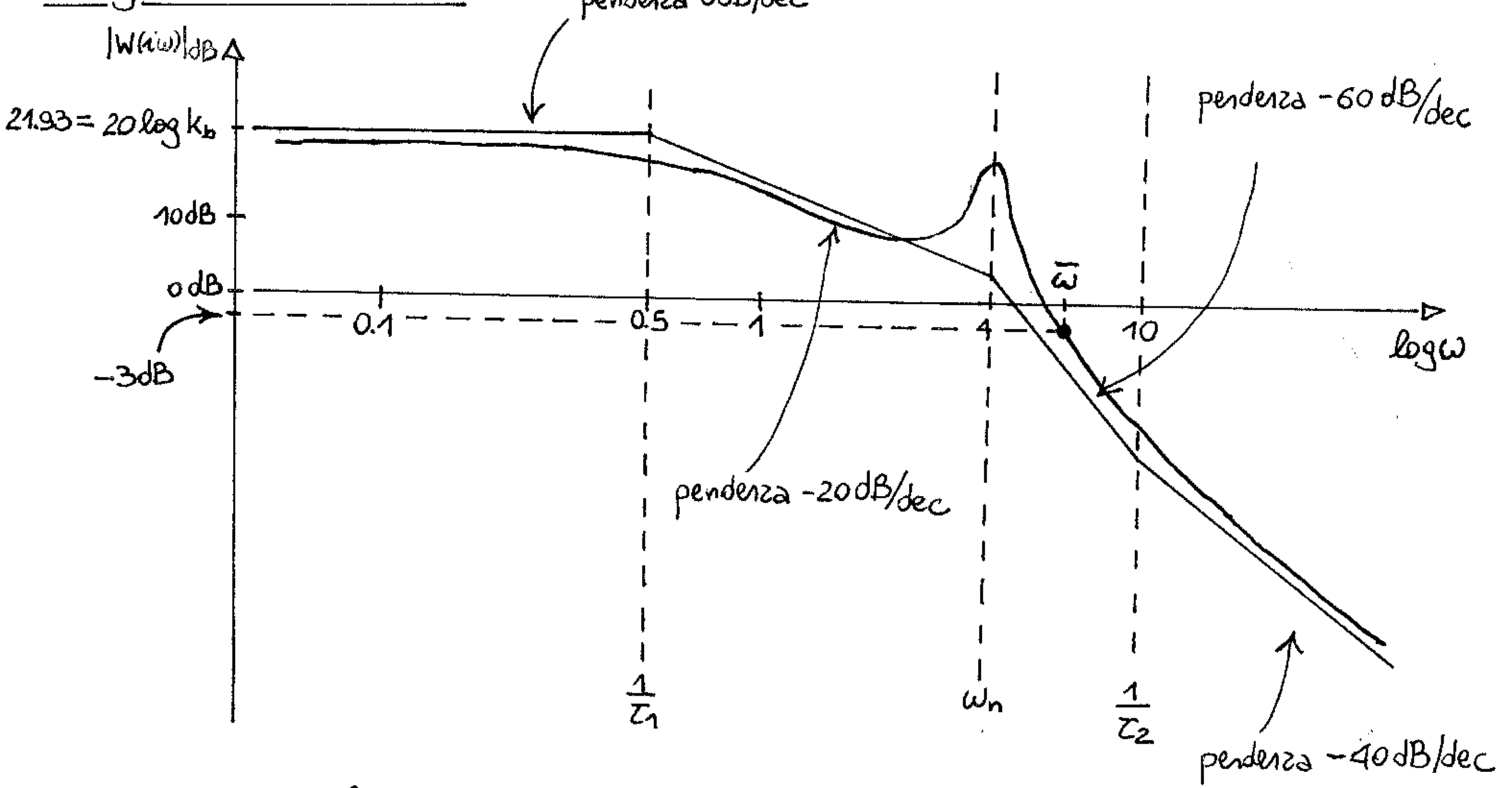
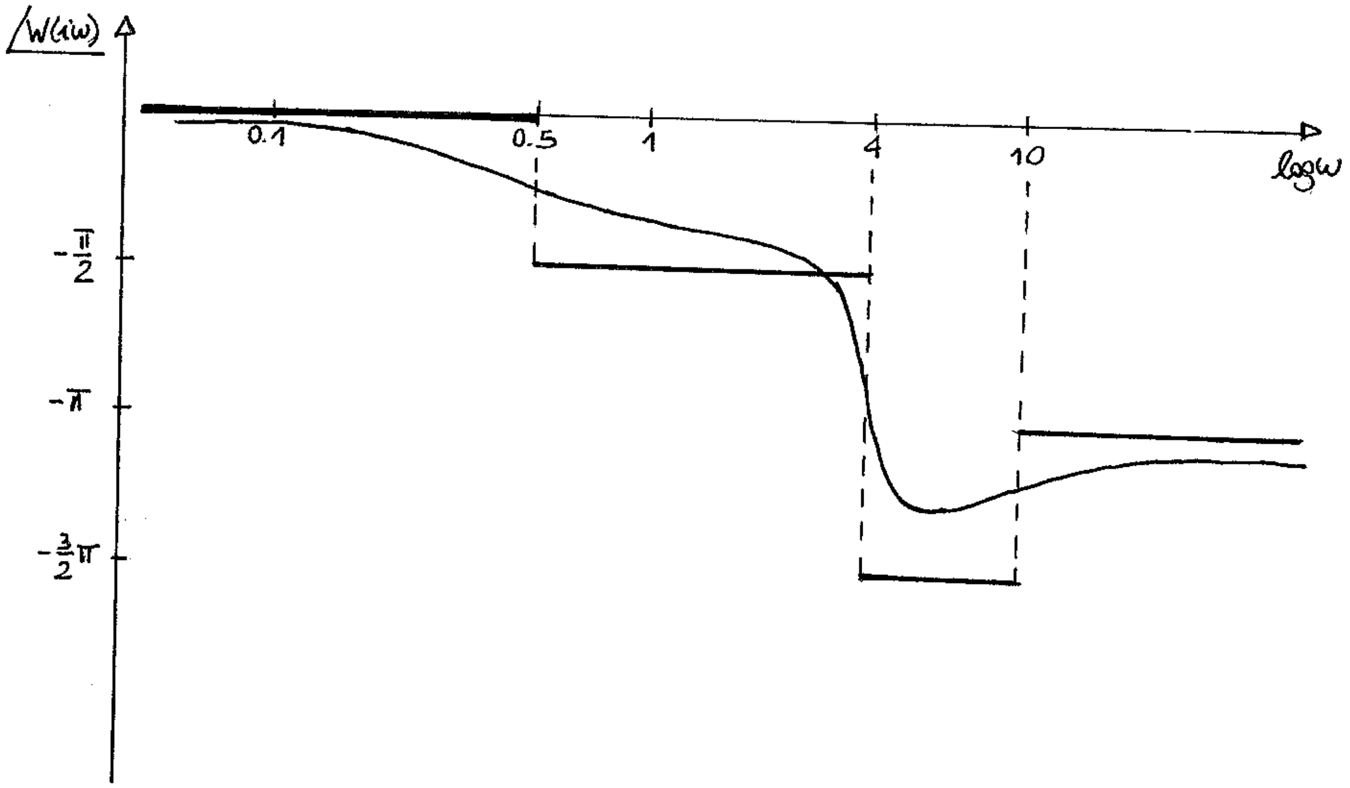


Diagramma della fase



2. Il Teorema della Risposta in Frequenza è applicabile perchè il sistema è ILUL stabile (i poli di $W(s)$ hanno tutti parte reale negativa).

Per il Teorema della Risposta in Frequenza:

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{W(s)} \longrightarrow |W(i\omega)| \sin\left(\omega t + \angle W(i\omega)\right) \quad \text{RISP. PERMANENTE}$$

$\sin(\omega t)$ → ampiezza 1

$|W(i\omega)| \sin(\dots)$ → ampiezza $|W(i\omega)|$

- se $|W(i\omega)| < 1$: <u>ATTENUAZIONE</u>

  → $|W(i\omega)|_{dB} < 0$

- se $|W(i\omega)| > 1$: <u>AMPLIFICAZIONE</u>

  → $|W(i\omega)|_{dB} > 0$

$\Rightarrow$ Attenuare di almeno 3 dB $\equiv$ verificare dove il diagramma del modulo sta sotto il livello -3dB

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega \geq \bar{\omega}}$ (si veda il grafico)

<u>Esercizio 3</u>

1. $W(z) = C(zI - A)^{-1}B$

$$zI - A = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z + \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (zI - A)^{-1} = \frac{1}{z\left(z + \frac{3}{2}\right) - 1} \begin{bmatrix} z + \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1} \begin{bmatrix} z + \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

5

$$W(z) = [2 \;\; 1] \frac{1}{z^2+\frac{3}{2}z-1} \begin{bmatrix} z+\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2+\frac{3}{2}z-1} [2 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z+2}{z^2+\frac{3}{2}z-1} = \frac{\cancel{z+2}}{(z-\frac{1}{2})(\cancel{z+2})} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

$\Delta = \frac{9}{4}+4 = \frac{25}{4}$

$z = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$

cancellazione zero-polo

2. Il sistema è stabile in senso ILUL perché il polo di $W(z)$ è $\frac{1}{2}$, che ha modulo minore di 1. Tuttavia, il sistema è (internamente) instabile perché gli autovalori di A sono $\frac{1}{2}$ e -2, ed il secondo ha modulo maggiore di 1.

3. $u(k) = 8\left[\delta_0(k) - (-\frac{1}{4})^k \delta_{-1}(k)\right] \Rightarrow U(z) = 8\left[1 - \frac{z}{z+\frac{1}{4}}\right] = 8 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{4}} = \frac{2}{z+\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow Y(z) = W(z)U(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{z+\frac{1}{4}}$

Definiamo $\tilde{Y}(z) = \frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}$ e scomponiamo in fratti semplici:

$$\tilde{Y}(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C}{z+\frac{1}{4}}$$

dove $A = \lim_{z\to 0} z\tilde{Y}(z) = \lim_{z\to 0} \frac{2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} = -16$

$B = \lim_{z\to\frac{1}{2}} (z-\frac{1}{2})\tilde{Y}(z) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{2}{z(z+\frac{1}{4})} = \frac{16}{3}$

$C = \lim_{z\to-\frac{1}{4}} (z+\frac{1}{4})\tilde{Y}(z) = \lim_{z\to-\frac{1}{4}} \frac{2}{z(z-\frac{1}{2})} = \frac{32}{3}$

$\Rightarrow Y(z) = z\tilde{Y}(z) = -16 + \frac{16}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{32}{3}\frac{z}{z+\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = -16\delta_0(k) + \frac{16}{3}\left[(\frac{1}{2})^k + 2(-\frac{1}{4})^k\right]\delta_{-1}(k)$