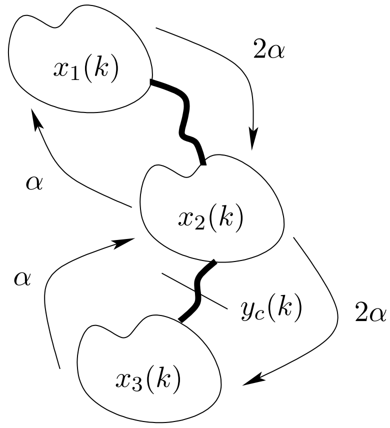
## I Prova in Itinere di Fondamenti di Automatica 08.06.2006

**Candidato:** **N. Matricola:**

### Esercizio 1

Una riserva di pesca è costituita da tre laghetti collegati tra loro da un torrente. La popolazione di trote nella riserva viene considerata ad intervalli di un giorno; siano rispettivamente $x_1(k), x_2(k), x_3(k)$ le popolazioni nei tre laghetti al giorno $k$. Ogni giorno una frazione $\alpha$ delle trote in ognuno dei laghetti risale la corrente e si sposta nel laghetto a monte, mentre una frazione $2\alpha$ si sposta nel laghetto a valle (si veda la figura a lato).




Sia $\alpha = 1/4$.

1. Si determini il modello lineare stazionario a tempo discreto $\mathrm{x}(k+1) = A\,\mathrm{x}(k)$ che descrive l'evoluzione del sistema, dove $\mathrm{x}(k) = [\ x_1(k)\ x_2(k)\ x_3(k)\ ]'$.
2. Si verifichi che la dinamica del sistema ha un modo costante e due modi che tendono asintoticamente a zero.
3. Si calcoli l'andamento nel tempo di ciascuna delle tre popolazioni supponendo che al giorno $k = 0$ vi siano 10 pesci nel laghetto 1, 20 pesci nel laghetto 2 e 40 pesci nel laghetto 3.
4. Si dimostri che il valore asintotico (per $k \to \infty$) di ciascuna delle tre popolazioni è funzione della popolazione iniziale totale $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)$, indipendentemente da come questa è distribuita nei laghetti.
5. Allo scopo di monitorare le popolazioni della riserva, nel tratto di torrente tra i laghetti 2 e 3 viene installato il *Contafish*™. Questo apparecchio misura il flusso netto giornaliero $y_c(k)$ di trote (numero di trote che transitano da monte a valle meno numero di trote che transitano da valle a monte) attraverso la sezione di torrente in cui è posto. Determinare l'insieme delle condizioni iniziali $\mathrm{x}(0)$ a cui corrisponde un flusso netto identicamente nullo lungo tutta l'evoluzione del sistema.

### Esercizio 2

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2^2(t) + x_1(t)\ \cos x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= (1 + x_1^2(t))\ \sin x_2(t)\end{aligned}$$

se ne determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

**Esercizio 3**

In basso a sinistra è illustrato un pendolo costituito da una massa puntiforme $M = 1$ kg, connessa a un estremo di un'asta inestensibile di lunghezza $L = 1$ m e massa trascurabile, incernierata all'altro estremo. Il sistema è modellizzato dall'equazione differenziale ordinaria

$$M\,L^2\,\ddot{\theta}(t) + \beta\,\dot{\theta}(t) + M\,L\,g\,\sin(\theta(t)) = 0$$

dove $g = 9.81$ m/s$^2$ è l'accelerazione di gravità, e $\beta = 1$ kg m$^2$/s è il coefficiente di attrito viscoso al giunto.

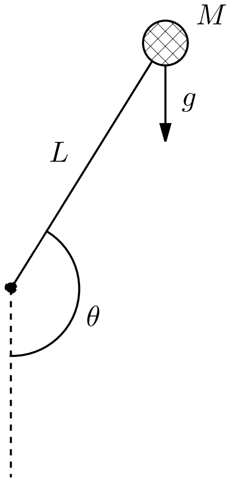
1. Scrivere un modello del sistema in forma di spazio di stato.

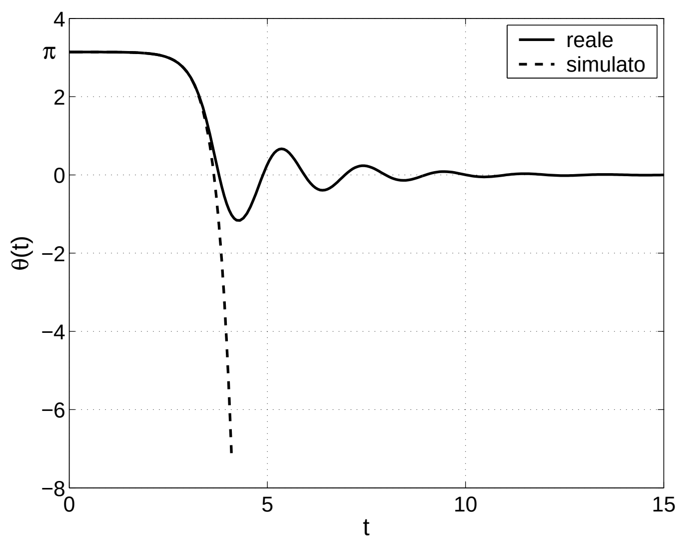
Il sistema, inizialmente in quiete nel punto di equilibrio $(\theta = \pi, \dot{\theta} = 0)$, viene leggermente perturbato nella posizione $(\theta = \pi - \varepsilon, \dot{\theta} = 0)$ con $\varepsilon = \pi \cdot 10^{-4}$, dalla quale viene fatto evolvere liberamente. Nel grafico in basso a destra la linea continua rappresenta l'andamento reale di $\theta(t)$, mentre la linea tratteggiata rappresenta l'andamento di $\theta(t)$ ottenuto simulando il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio.
Utilizzando i concetti illustrati a lezione, e giustificando le risposte anche con calcoli analitici:

2. Spiegare perché i due andamenti sono inizialmente sovrapponibili, e poi divergono.

3. Commentare l'andamento di $\theta(t)$ reale (linea continua), spiegandolo in relazione ai punti di equilibrio del sistema e alle corrispondenti proprietà rispetto alla stabilità.

4. Commentare l'andamento divergente di $\theta(t)$ simulato (linea tratteggiata), spiegandolo in relazione al tipo dei modi del sistema linearizzato.



# SOLUZIONI

## Esercizio 1

1. L'evoluzione del sistema segue le equazioni:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - 2\alpha x_1(k) + \alpha x_2(k) = (1-2\alpha) x_1(k) + \alpha x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) - \alpha x_2(k) - 2\alpha x_2(k) + 2\alpha x_1(k) + \alpha x_3(k)$$
$$= 2\alpha x_1(k) + (1-3\alpha) x_2(k) + \alpha x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) - \alpha x_3(k) + 2\alpha x_2(k) = 2\alpha x_2(k) + (1-\alpha) x_3(k)$$

Dunque il sistema può essere posto nella forma $x(k+1) = Ax(k)$,

dove $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 1-3\alpha & \alpha \\ 0 & 2\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$.

Essendo $\alpha = \frac{1}{4}$:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

2. Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A$:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \tfrac{1}{2}) \det \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{4} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda - \tfrac{1}{2}) \left[ (\lambda - \tfrac{1}{4})(\lambda - \tfrac{3}{4}) - \tfrac{1}{8} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} (\lambda - \tfrac{3}{4}) \right] =$$

$$= (\lambda - \tfrac{1}{2}) \left( \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{8} (\lambda - \tfrac{3}{4})$$

$$= \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{7}{16}\lambda + \frac{1}{16}$$

A tempo discreto, un modo costante corrisponde all'autovalore $\lambda=1$. (2)
Verifichiamo se $\lambda=1$ è autovalore di A, cioè se è radice di $p_A(\lambda)$...

$$\left.\lambda^3-\frac{3}{2}\lambda^2+\frac{7}{16}\lambda+\frac{1}{16}\right|_{\lambda=1}=1-\frac{3}{2}+\frac{7}{16}+\frac{1}{16}=0 \quad \underline{\text{ok}}$$

Abbassiamo di grado con Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{16} & \frac{1}{16} \\ 1 & & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & // \end{array}$$

Dunque:

$$p_A(\lambda)=(\lambda-1)\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{16}\right)$$

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lambda=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \quad p_A(\lambda)=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})\right)$$

Gli autovalori di A sono:

$\lambda_1=1$

$\lambda_2=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\simeq 0.6036$ $\Rightarrow$ 3 autovalori distinti $\Downarrow$ A è diagonalizzabile

$\lambda_3=\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})\simeq -0.1036$

I modi del sistema sono:

$\lambda_1^k=1$ modo costante

$\lambda_2^k=\left[\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right]^k$ modo convergente perché $|\lambda_2|<1$

$\lambda_3^k=\left[\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})\right]^k$ modo convergente perché $|\lambda_3|<1$

3. Si deve calcolare la risposta libera

$$x(k) = A^k x_0$$

con $x_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Dato che $A$ e' diagonalizzabile, $x(k)$ assume la seguente espressione:

$$x(k) = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \alpha_3 \lambda_3^k v_3$$

dove $v_i$ e' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda_i$, $i = 1,2,3$,
e $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ sono le <u>coordinate</u> di $x_0$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Infatti:

$$x_0 = x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3.$$

Calcoliamo un autovettore $v_1$ relativo a $\lambda_1 = 1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(riduzione a scala)

sistema omogeneo: $x_1 - \frac{1}{2} x_2 = 0$

$x_2 - \frac{1}{2} x_3 = 0$

Posto arbitrariamente $x_3 = \alpha$:

$$x_2 = \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2}\alpha$$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2 = \frac{1}{4}\alpha$$

$\Rightarrow$ autospazio $V_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \left\{ v = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Con $\alpha = 40$ si ha:

$v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$, e osserviamo che $v_1 = x_0$!!!

Dunque:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = v_1 \\ x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

e

$$x(k) = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\alpha_1}\, \underset{\substack{\parallel \\ 1^k}}{\lambda_1^k}\, \underset{\substack{\parallel \\ x_0}}{v_1} = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(k) = x_0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Osserviamo che, a ogni istante, la popolazione di trote nel sistema è costante, perché non ci sono né ingressi né uscite di trote dal sistema. Quindi:

$$x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

D'altra parte, essendo:

$$x(k) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2^k v_2 + \alpha_3 \lambda_3^k v_3$$

$\lambda_1^k = 1^k = 1$

$\lambda_2^k \to 0$ per $k \to \infty$

$\lambda_3^k \to 0$ per $k \to \infty$

abbiamo:

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \alpha_1 v_1$$

Scriviamo $x(\infty) = \alpha_1 v_1$ (valore asintotico dello stato)

Risulta:

$$x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = x_1(\infty) + x_2(\infty) + x_3(\infty)$$

(per la conservazione del numero delle trote)

$$= \alpha_1 (10 + 20 + 40)$$

componenti di $v_1$

$$= 70\, \alpha_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)}{70}$$

e

$$x(\infty) = \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)}{70} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} = \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Abbiamo mostrato che il valore asintotico dello stato è solo funzione della popolazione iniziale di trote, e <u>non</u> della distribuzione iniziale

5. $y_c(k)$ risulta:

$$y_c(k) = 2\alpha x_2(k) - \alpha x_3(k)$$

Cerchiamo le condizioni iniziali $x(0)$ per cui $\underline{\underline{y_c(k)=0 \quad \forall k = 0,1,2,3,\dots}}$

$$y_c(k) = 0 \iff 2\alpha x_2(k) - \alpha x_3(k) = 0$$

$$\iff x_2(k) = \frac{1}{2} x_3(k)$$

Con questa condizione risulta:

$$x_3(k+1) = x_3(k) \underbrace{- \alpha x_3(k) + 2\alpha x_2(k)}_{=\,0} = x_3(k)$$

$\Rightarrow x_3(k+1) = x_3(k)$, cioè $x_3(k)$ rimane costante, e pari a $x_3(0)$.

Inoltre, anche $x_2(k)$ rimane costante, perché

$$x_2(k) = \frac{1}{2} x_3(k) = \frac{1}{2} x_3(0).$$

Se $x_2(k)$ rimane costante, è tale che $x_2(k+1) = x_2(k)$. Quindi:

$$\left.\begin{aligned} &x_2(k+1) = x_2(k) \\ &x_2(k+1) = x_2(k) - \alpha x_2(k) - 2\alpha x_2(k) + 2\alpha x_1(k) + \alpha x_3(k) \end{aligned}\right\} \; 2\alpha x_1(k) - \alpha x_2(k) = 0$$

$$- \alpha x_2(k) + \alpha x_3(k) = 0$$

$$\Rightarrow x_1(k) = \frac{1}{2} x_2(k) = \frac{1}{4} x_3(0)$$

anche $x_1(k)$ rimane costante.

Dunque le condizioni iniziali cercate sono del tipo (posto $x_3(0) = \alpha$):

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\alpha}{2} \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

SONO TUTTE LE CONDIZIONI INIZIALI APPARTENENTI ALL'AUTOSPAZIO $\mathcal{V}_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$ !!!

punti di equilibrio del sistema, essendo $\lambda_1 = 1$.

## Esercizio 2

Il sistema è nella forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

dove

$$f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2^2 + x_1 \cos(x_2) \\ (1 + x_1^2)\sin(x_2) \end{bmatrix}.$$

punti di equilibrio

$$f(x_1, x_2) = 0 \iff \begin{cases} x_2^2 + x_1 \cos(x_2) = 0 \\ \underbrace{(1+x_1^2)}_{\neq 0} \sin(x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2^2 + x_1 \cos(x_2) = 0 \\ \sin(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (k\pi)^2 + (-1)^k x_1 = 0 \\ x_2 = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = (-1)^{k+1} (k\pi)^2 \\ x_2 = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$x_{eq,k} = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} (k\pi)^2 \\ k\pi \end{bmatrix} \qquad k = 0, \pm 1, \dots$$

Matrice Jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\cos(x_2) & 2x_2-x_1\sin(x_2)\\ 2x_1\sin(x_2) & (1+x_1^2)\cos(x_2)\end{bmatrix}$$

Matrici dei sistemi linearizzati

$$A_{lin,k}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_{eq,k}}=\begin{bmatrix}(-1)^k & *\\ 0 & \underbrace{(1+*)}_{>0}(-1)^k\end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $A_{lin,k}$ sono $\lambda_1=(-1)^k$ e $\lambda_2=\underbrace{(1+*)}_{>0}(-1)^k$ (matrice in forma triangolare superiore); e quindi:

- per k dispari: $\lambda_1<0$ e $\lambda_2<0$ $\Rightarrow$ punto di equilibrio <u>asintoticamente stabile</u>
- per k pari: $\lambda_1>0$ e $\lambda_2>0$ $\Rightarrow$ punto di equilibrio <u>instabile</u>

Esercizio 3

1. Definiamo lo stato come $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\theta\\ \dot\theta\end{bmatrix}$. Otteniamo:

$$\dot x_1=\dot\theta=x_2$$

$$\dot x_2=\ddot\theta=-\frac{g}{L}\sin(\theta)-\frac{\beta}{ML^2}\dot\theta=-\frac{g}{L}\sin(x_1)-\frac{\beta}{ML^2}x_2$$

$$=-g\sin(x_1)-x_2$$

$\Rightarrow$ forma di stato (nonlineare) $\begin{cases}\dot x_1=x_2\\ \dot x_2=-g\sin(x_1)-x_2\end{cases}$

2. Il sistema linearizzato approssima il sistema reale solo per piccoli scostamenti dal punto di equilibrio...

3. Il sistema si allontana da un punto di equilibrio INSTABILE $(\theta=\pi, \dot{\theta}=0)$ e si porta verso un punto di equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$...

verificare gli autovalori dei sistemi linearizzati...

4. Il sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio INSTABILE $(\theta=\pi, \dot{\theta}=0)$ ha un autovalore positivo, a cui corrisponde un modo divergente...