COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 11.01.2006

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

E' dato il sistema LTI a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \triangleq \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \triangleq \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, e $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita.

a) Studiare la stabilità e i modi del sistema.

b) Calcolare la risposta in $y(k)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (6, 4, 0)$ e ingresso

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Suggerimento. Per come è fatto l'ingresso $u(k)$, per $k = 1, 2, \ldots$ il sistema è in evoluzione libera dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(1)$. Occorre quindi dapprima ricavare $\mathbf{x}(1)$ ...

Esercizio 2.

Si consideri la seguente funzione di trasferimento di un sistema LTI a tempo continuo:

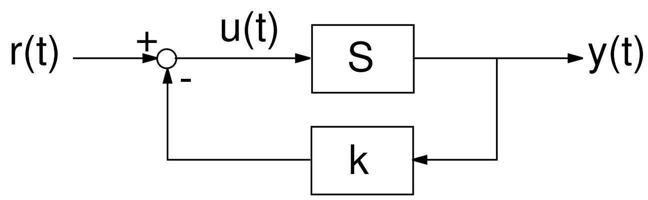
$$W(s) = \frac{10(s^2 + 0.5\,s + 25)}{s(s^2 + 39\,s - 40)}$$

a) Tracciare il diagramma di Bode asintotico e reale del modulo e della fase della corrispondente funzione di risposta in frequenza $W(\jmath\omega)$.

b) Calcolare la corrispondente risposta impulsiva $w(t)$.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema in retroazione Σ descritto dallo schema a blocchi in figura:



dove il sistema S è descritto dalle equazioni nonlineari

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - 2\,x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 3\,x_2^2(t) + x_2(t) + 2\,u(t) \\ y(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

e k è un parametro reale.

a) Scrivere le equazioni del sistema in retroazione Σ.

b) Posto $r(t) = 0$, determinare per quali valori del parametro k l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per Σ.

TIPO 1

Esercizio 1

a) $\lambda_1=-1$ sistema STABILE modi: $(-1)^k$, $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\lambda_2=\frac{1}{4}$

$\lambda_3=\frac{1}{2}$

b) $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$\Rightarrow x(1)=Ax(0)+Bu(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$; $y(0)=Cx(0)=6$

$x(k)=A^{k-1}x(1)$ per $k=1,2,3,\dots$

$$\begin{array}{cc} T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix} \\ \quad\; v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array} \Rightarrow \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x(k)=z_1(-1)^{k-1}v_1+z_2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}v_2+z_3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}v_3$ per $k=1,2,3,\dots$

$\Rightarrow y(k)=z_1(-1)^{k-1}Cv_1+z_2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}Cv_2+z_3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}Cv_3=$

$=z_1(-1)^{k-1}-z_2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2z_3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ per $k=1,2,3,\dots$

$x(1)=v_2+v_3 \Rightarrow z_1=0,\ z_2=1,\ z_3=1$

$\Rightarrow y(k)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ per $k=1,2,3,\dots$

$$y(k)=\begin{cases}6 & \text{per } k=0\\ -\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} & \text{per } k=1,2,3,\dots\end{cases}$$

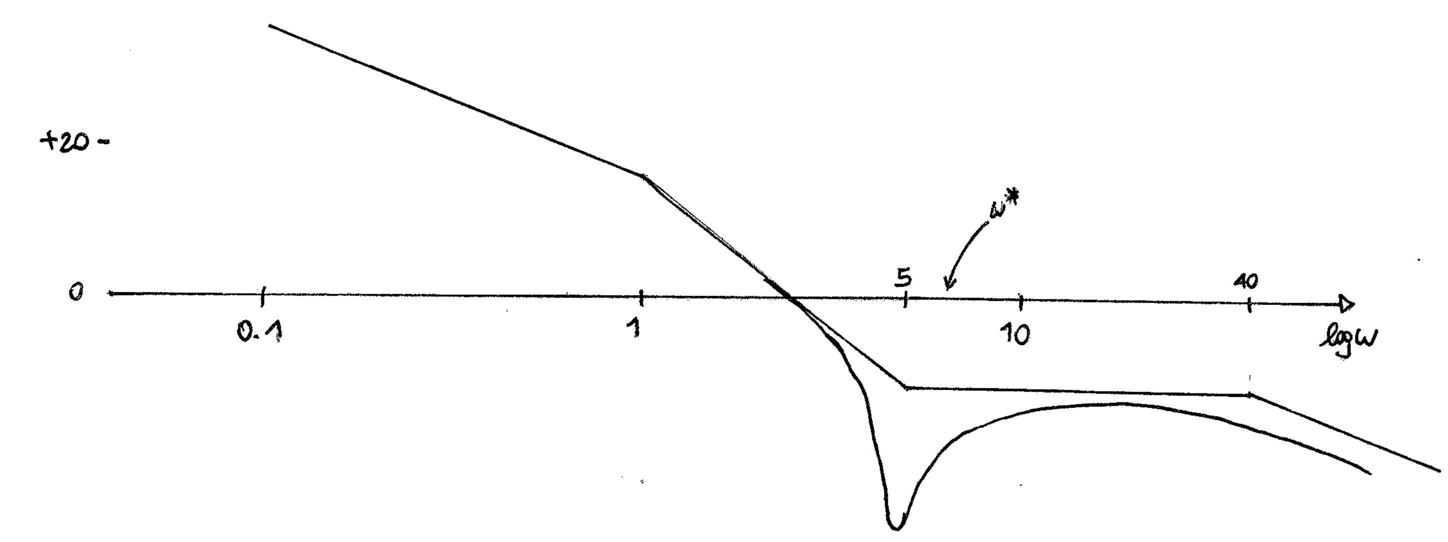
Esercizio 2

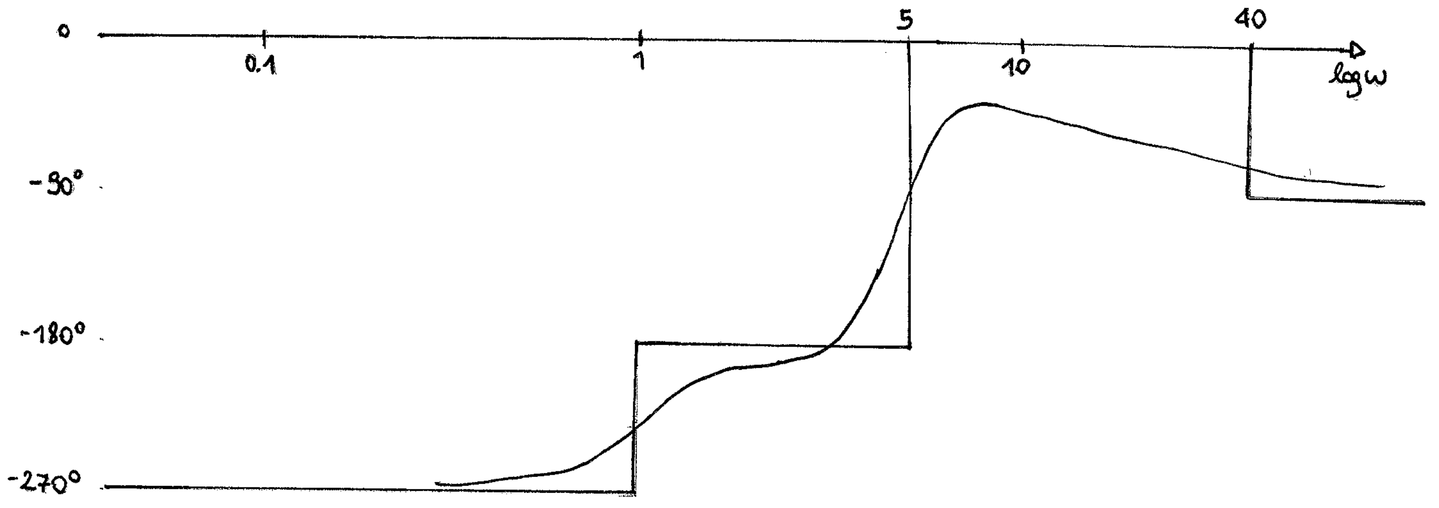
a) $$W(s)=\frac{10(s^2+0.5s+25)}{s(s^2+39s-40)}=\frac{10(s^2+0.5s+25)}{s(s+40)(s-1)}=-\frac{25}{4}\frac{1+\frac{s}{50}+\frac{s^2}{25}}{s(1-s)\left(1+\frac{s}{40}\right)}$$

$$=k_b\frac{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}{s(1-\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$$ dove $k_b=-\frac{25}{4}$, $\tau_1=1$, $\tau_2=\frac{1}{40}$, $\omega_n=5$, $\zeta=0.05$

$|k_b|_{dB}\simeq 15.9\ dB$

$$\left|\frac{k_b}{s}\right|_{s=j\omega^*} = 1 \Rightarrow \omega^* = |k_b| = 6.25$$





b) $w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)]$

$$W(s) = \frac{10s^2 + 5s + 250}{s(s-1)(s+40)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+40}$$

$$A = \lim_{s\to 0} s\,W(s) = -\frac{25}{4}$$

$$B = \lim_{s\to 1} (s-1)W(s) = \frac{265}{41}$$

$$C = \lim_{s\to -40} (s+40)W(s) = \frac{1605}{164}$$

$$\Rightarrow w(t) = \left[-\frac{25}{4} + \frac{265}{41}e^{t} + \frac{1605}{164}e^{-40t}\right]\mathbb{1}(t)$$

Esercizio 3

a) $\dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_1 + x_2 + u$

$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^2 + x_2 + 2u$

$y = -x_1 + x_2$

$u = r - ky = r + kx_1 - kx_2$

$\dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_1 + x_2 + r + kx_1 - kx_2$

$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^2 + x_2 + 2r + 2kx_1 - 2kx_2$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + (k-2)x_1 + (1-k)x_2 + r \\ \dot{x}_2 &= (2k-1)x_1 - 3x_2^2 + (1-2k)x_2 + 2r \end{aligned}}$$

b)
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 + (k-2) & 1-k \\ 2k-1 & -6x_2 + (1-2k) \end{bmatrix}$$

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} k-2 & 1-k \\ 2k-1 & 1-2k \end{bmatrix} \qquad p_{A_{lin}}(\lambda) = \lambda^2 + (k+1)\lambda + (2k-1)$$

$k+1 > 0 \Rightarrow k > -1$

$2k-1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{k > \frac{1}{2}}$

(Cartesio)