COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 07.12.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

E' dato il sistema LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha+3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

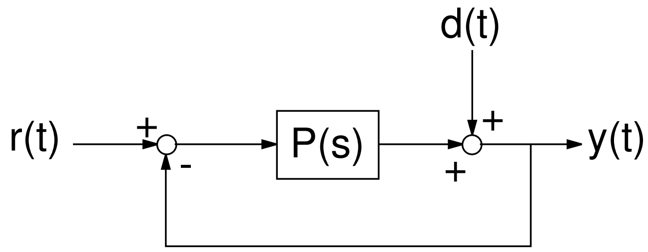
dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita, e α è un parametro reale.

a) Studiare la stabilità e i modi del sistema al variare del parametro α.

b) Posto $\alpha = -3$, calcolare la risposta completa nell'uscita $y(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ e ingresso $u(t) = \sin(2t)\mathbf{1}(t)$, dove $\mathbf{1}(t)$ denota il gradino unitario.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema in retroazione Σ descritto dallo schema a blocchi in figura:



dove $P(s) = k_P \dfrac{1 + \frac{2s}{7}}{1 - 13s + \frac{s^2}{2}}$, con k_P parametro da determinare. Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema da r a y, e con $W_d(s)$ quella da d a y.

a) Discutere la stabilità ILUL del sistema Σ al variare di k_P.

b) Determinare il valore di k_P in modo tale che la risposta a regime permanente in $y(t)$ a un disturbo $d(t)$ a gradino unitario sia pari a $\frac{1}{50}$.

c) Con il valore di k_P determinato al punto *b*), tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della funzione di risposta in frequenza $W(\jmath\omega)$.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{0.08}{x_1(t)} - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_2(t) + 0.6\,x_2(t)u(t) + x_2^2(t),\end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, e $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso.

a) Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, $\forall t$.

b) Per ciascun punto di equilibrio trovato, riportare le matrici $\mathbf{A}_{lin}$ e $\mathbf{B}_{lin}$ del corrispondente sistema linearizzato.

c) Studiare la stabilità per ciascun punto di equilibrio trovato.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha+3 & -3 \end{bmatrix}$

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-\alpha)(\lambda+3)$

Dunque gli autovalori del sistema sono:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \alpha$

$\lambda_3 = -3$

A causa dell'autovalore $\lambda_1 > 0$, il sistema è INSTABILE per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -3$, gli autovalori del sistema sono tutti distinti. La matrice A è dunque diagonalizzabile, e i modi del sistema sono: $e^{t}, e^{\alpha t}, e^{-3t}$.

Se $\alpha = 1$, l'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ha molteplicità algebrica 2.
Verifichiamo la molteplicità geometrica.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(A - \lambda_1 I) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim\left(\ker(A - \lambda_1 I)\right) = 3 - 1 = 2$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ è 2, ed è pari alla sua molteplicità algebrica.

Dato che, per $\alpha = 1$, la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori coincidono, la matrice A è diagonalizzabile, e i modi del sistema sono: e^{t}, e^{-3t}.

La stessa analisi vale per $\alpha = -3$.

b) Per $\alpha=-3$:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 4\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}x_0+C(sI-A)^{-1}B\,U(s)$$

dove $U(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$.

$$sI-A=\begin{bmatrix}s-1 & 4 & -4\\ 0 & s+3 & 0\\ 0 & 0 & s+3\end{bmatrix} \Rightarrow (sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s+3)^2}\begin{bmatrix}(s+3)^2 & * & 4(s+3)\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}$$

NOTA- $*$ sono elementi che non serve calcolare per come sono fatte B, C e x_0.

$$Y(s)=\underbrace{\frac{1}{s-1}}_{Y_\ell(s)}+\underbrace{\frac{4}{(s-1)(s+3)}\,\frac{2}{s^2+4}}_{Y_f(s)}$$

$$Y_f(s)=\frac{a}{s-1}+\frac{b}{s+3}+\frac{cs+d}{s^2+4}=\quad \text{(scomposizione in fratti semplici)}$$

$$=\frac{2}{5}\,\frac{1}{s-1}-\frac{2}{13}\,\frac{1}{s+3}-\frac{16}{65}\,\frac{s}{s^2+4}-\frac{56}{65}\,\frac{1}{s^2+4}$$

(avendo ottenuto a,b,c e d con i metodi noti:

$$a=\lim_{s\to1}(s-1)Y_f(s)=\dots\quad \text{etc.})$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{7}{5}\,\frac{1}{s-1}-\frac{2}{13}\,\frac{1}{s+3}-\frac{16}{65}\,\frac{s}{s^2+4}-\frac{28}{65}\,\frac{2}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\left[\frac{7}{5}e^{t}-\frac{2}{13}e^{-3t}-\frac{16}{65}\cos(2t)-\frac{28}{65}\sin(2t)\right]1(t)$$

ESERCIZIO 2

$$W(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)} = \frac{k_p\left(1+\frac{2}{7}s\right)}{\left(1-13s+\frac{s^2}{2}\right)+k_p\left(1+\frac{2}{7}s\right)}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{1+P(s)} = \frac{1-13s+\frac{s^2}{2}}{\left(1-13s+\frac{s^2}{2}\right)+k_p\left(1+\frac{2}{7}s\right)}$$

a) I poli del sistema Σ sono le radici del polinomio:

$$\left(1-13s+\frac{s^2}{2}\right)+k_p\left(1+\frac{2}{7}s\right) = \frac{1}{2}s^2+\left(\frac{2}{7}k_p-13\right)s+(k_p+1) \triangleq p(s)$$

Affinchè il sistema Σ sia ILUL stabile, tutti i suoi poli devono avere parte reale negativa. Dato che il polinomio $p(s)$ è di 2° grado, condizione necessaria e sufficiente affinchè tutte le sue radici abbiano parte reale negativa è che tutti i coefficienti del polinomio siano di segno concorde:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{2}{7}k_p - 13 > 0 & \Rightarrow \quad k_p > \frac{91}{2} = 45.5 \\ k_p + 1 > 0 & \Rightarrow \quad k_p > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il sistema Σ è <u>ILUL stabile</u> se e solo se $k_p > 45.5$.

b) Il guadagno in continua da $d(t)$ a $y(t)$ è (supposto che Σ sia ILUL stabile, quindi $k_p > 45.5$):

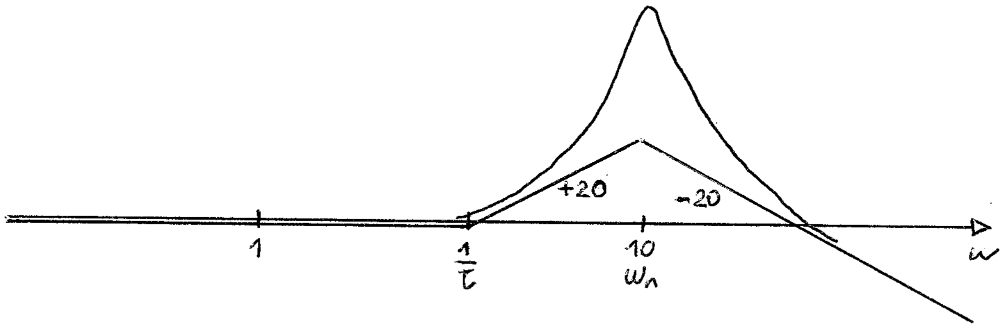
$$W_d(0) = \frac{1}{1+P(0)} = \frac{1}{1+k_p}$$

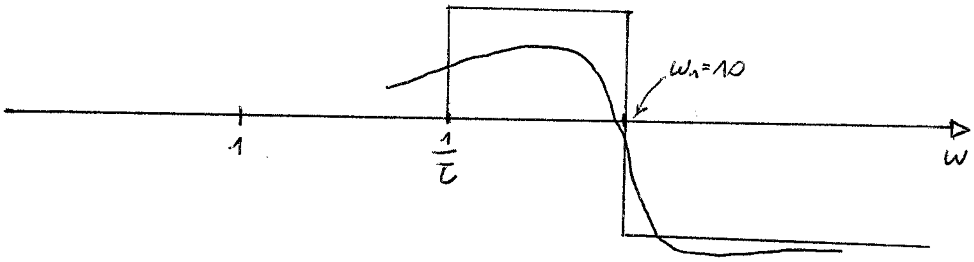
$$\frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_p = 49}$$

<u>NOTA</u> - Si osservi che $k_p = 49 > 45.5$, e quindi Σ è ILUL stabile.

c) $$W(s) = \frac{49\left(\frac{2}{7}s+1\right)}{\frac{1}{2}s^2+s+50} = \frac{49}{50}\,\frac{1+\frac{2}{7}s}{1+\frac{s}{50}+\frac{s^2}{100}} = k_b\,\frac{1+\tau s}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$k_b = \frac{49}{50} = -0.175\,dB,\quad \tau = \frac{2}{7},\quad \omega_n = 10,\quad \zeta = 0.1$$





ESERCIZIO 3

Il sistema e' nella forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove:

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} \frac{0.08}{x_1} - x_2 \\ x_1 x_2 + 0.6\,x_2 u + x_2^2 \end{bmatrix}$$

a) Poniamo $f(x,u)=0$ con $u=-1$:

$$\begin{cases} \frac{0.08}{x_1} - x_2 = 0 \\ x_1 x_2 - 0.6\,x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 x_2 = 0.08 \\ x_2^2 - 0.6\,x_2 + 0.08 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{0.08}{x_2} = \begin{cases} 0.4 \\ 0.2 \end{cases} \\ x_2 = \begin{cases} 0.2 \\ 0.4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad X_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\frac{0.08}{x_1^2} & -1 \\ x_2 & x_1 + 0.6u + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X_{eq,1} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X_{eq,1} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X_{eq,2} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X_{eq,2} \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

c) $p_{A_{lin,1}}(\lambda) = \lambda^2 + 0.3\lambda + 0.1$ => tutte permanenze di segno

=> $X_{eq,1}$ e' ASINTOTICAMENTE STABILE

$p_{A_{lin,2}}(\lambda) = \lambda^2 + 1.6\lambda - 0.4$ => una variazione di segno

=> $X_{eq,2}$ e' INSTABILE