

COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 27.09.2005

Candidato:

N. Matricola:

Esercizio 1.

E' dato il sistema LTI a tempo continuo:

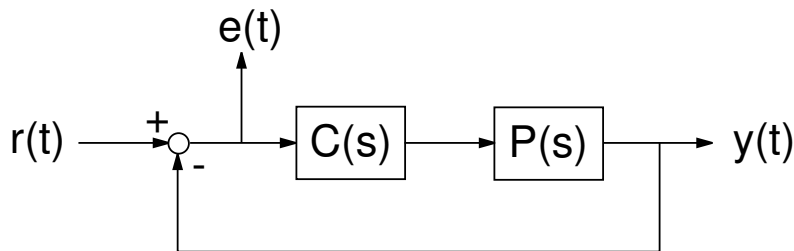
$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{C} \mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, e $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita.

- Studiare la stabilità e i modi del sistema.
- Calcolare la risposta completa nell'uscita $y(t)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (2, -1)$ e ingresso $u(t) = e^{-2t} \mathbf{1}(t)$, dove $\mathbf{1}(t)$ denota il gradino unitario.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in figura :



dove $P(s) = \frac{s+2}{s+1}$ e $C(s) = \frac{k_c}{\tau s+1}$, con k_c e τ parametri positivi da determinare. Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema da r a y , e con $W_e(s)$ quella da r a e .

- Determinare il valore di k_c in modo tale che la risposta a regime permanente in $e(t)$ all'ingresso $r(t) = \mathbf{1}(t)$ (gradino unitario) sia pari a $1/5$.
- Con il valore di k_c determinato al punto 1, determinare il valore di τ in modo tale che i poli di $W(s)$ abbiano pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{5/7}$.
- Con i valori di k_c e τ determinati ai punti 1 e 2, tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della funzione di risposta in frequenza $W(j\omega)$.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) - x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -\frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + 4x_1^3(k) + u(k),\end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, e $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso.

- Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$.
- Posto $u(k) = -4x_1^3(k) + v(k)$, il sistema diventa LTI. Determinare la sequenza di ingressi $v(k)$ per portare in due passi lo stato del sistema da $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$ a $\mathbf{x}(2) = (-1, 3/2)$.

Esercizio 1

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + \frac{1}{3})(\lambda - \frac{1}{3}) + \frac{10}{9} = \lambda^2 - \frac{1}{9} + \frac{10}{9} = \lambda^2 + 1$$

Gli autovalori del sistema sono:

$$\lambda_1 = j$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -j$$

Il sistema è STABILE.

I modi del sistema sono: $\sin(t)$, $\cos(t)$.

b) La risposta completa $y(t)$ del sistema si scompone nella somma di due contributi:

$$y(t) = y_e(t) + y_f(t)$$

$\downarrow$ risposta libera (dipende da x_0) $\swarrow$ risposta forzata (dipende da u)

• $y_e(t) = \mathcal{L}^{-1} [W_0(s) x_0]$, dove $W_0(s) = C(sI - A)^{-1}$.

Essendo: $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & s + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, si ha:

$$W_0(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & s + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-s+2}{s^2+1} & \frac{s+1}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_0(s) x_0 = \begin{bmatrix} \frac{-s+2}{s^2+1} & \frac{s+1}{s^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-3(s-1)}{s^2+1} =$$

$$= -3 \cdot \frac{s}{s^2+1} + 3 \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando:

(2)

$$y_e(t) = \mathcal{L}^{-1}[W_0(s)x_0] = [-3 \cos(t) + 3 \sin(t)] \mathbb{1}(t)$$

• $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$, dove $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$

e $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s+2}$.

$$W(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & s + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow W(s)U(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{a}{s+2} + \frac{bs+c}{s^2+1}$$

$$a = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)W(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+1}{s^2+1} = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{s+1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{-\frac{1}{5}}{s+2} + \frac{bs+c}{s^2+1} = \frac{-\frac{1}{5}s^2 - \frac{1}{5} + bs^2 + cs + 2bs + 2c}{(s+2)(s^2+1)}$$

$$\begin{cases} b - \frac{1}{5} = 0 \\ c + 2b = 1 \\ 2c - \frac{1}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ c = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\leadsto \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1 \text{ (ok)}$$

$$\Rightarrow W(s)U(s) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] = \left[-\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t) \right] \mathbb{1}(t)$$

• In conclusione:

$$y(t) = y_e(t) + y_f(t) = \left[-\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{14}{5}\cos(t) + \frac{18}{5}\sin(t) \right] \mathbb{1}(t).$$

Esercizio 2

3

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\begin{aligned} a) \quad W_e(s) &= \frac{1}{1 + \frac{k_c}{\tau s + 1} \cdot \frac{s+2}{s+1}} = \frac{(\tau s + 1)(s+1)}{(\tau s + 1)(s+1) + k_c(s+2)} = \\ &= \frac{\tau s^2 + (\tau + 1)s + 1}{\tau s^2 + (\tau + k_c + 1)s + (2k_c + 1)} \end{aligned}$$

La risposta a regime permanente in $e(t)$ all'ingresso $r(t) = 1(t)$ si può calcolare applicando il teorema del valor finale:

$$\begin{aligned} e_{\infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) R(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s W_e(s) \frac{1}{s} = W_e(0) = \\ &= \frac{1}{2k_c + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2k_c + 1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{k_c = 2}$$

NOTA - Osservare che, essendo $\tau > 0$ e $k_c > 0$, a denominatore di $W_e(s)$ non ci sono alternanze di segno, e quindi i poli di $W_e(s)$ hanno parte reale negativa.

è un polinomio di 2° grado
si può applicare il Teorema del Valor Finale

$$\begin{aligned} b) \quad W(s) &= \frac{k_c(s+2)}{(\tau s + 1)(s+1) + k_c(s+2)} = \triangle k_c = 2 \\ &= \frac{2(s+2)}{\tau s^2 + (\tau + 3)s + 5} = \frac{4}{5} \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + \frac{\tau + 3}{5}s + \frac{s^2}{(\frac{5}{\tau})}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\tau + 3}{5}s + \frac{s^2}{(\frac{5}{\tau})} = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{5}{\tau}$$

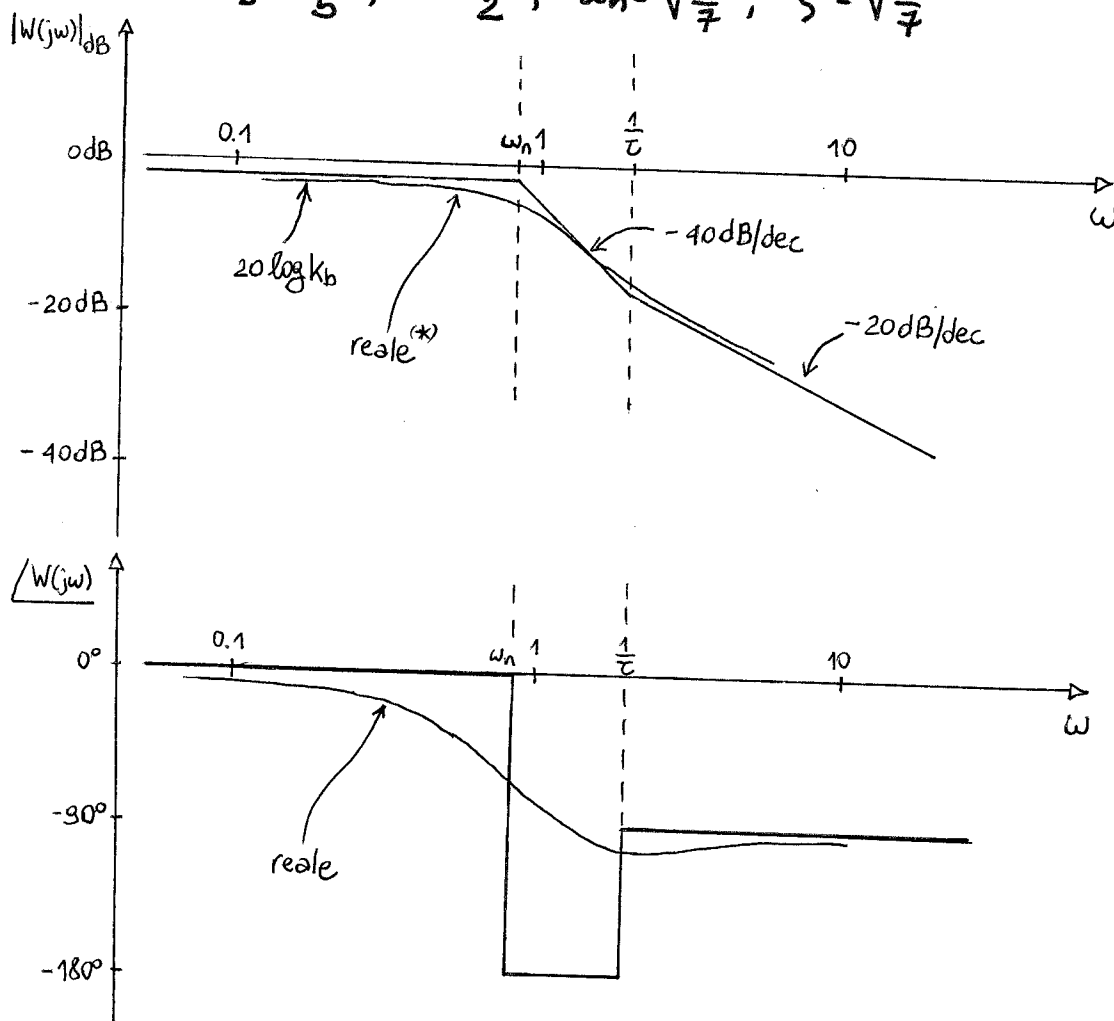
Imponendo $\omega_n = \sqrt{\frac{5}{7}}$, si ha:

$$\frac{5}{\tau} = \frac{5}{7} \Rightarrow \boxed{\tau = 7}$$

Da cui, inoltre: $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{\tau+3}{5} \Rightarrow \zeta = \omega_n = \sqrt{\frac{5}{7}} \approx 0.8452$

c) $W(s) = k_b \frac{1+\tau s}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$
in forma
di Bode

dove: $k_b = \frac{4}{5}$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{5}{7}}$, $\zeta = \sqrt{\frac{5}{7}}$



(*) Non c'è la "gobbetta" perché $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$.

Esercizio 3

(5)

a) Calcoliamo i punti di equilibrio del sistema quando $u(k)=0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 4x_1^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1(4x_1^2 - \frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{eq,3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice jacobiana del sistema è:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} + 12x_1^2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \bullet \quad A_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{eq,1}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_{A_1}(\lambda) &= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 \\ & & \Delta &= \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \\ & & \lambda_{1,2} &= \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17}) \approx 1.2808 \\ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17}) \approx -0.7808 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_{eq,1}$ è un punto di equilibrio INSTABILE.

$$\begin{aligned} \bullet \quad A_{2,3} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{eq,2}} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{eq,3}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & P_{A_{2,3}}(\lambda) &= \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ & & \Delta &= \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} \\ & & \lambda_{1,2} &= \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}j}{2} = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \sqrt{7}j) \\ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{7}j) \end{cases} \\ & & |\lambda_{1,2}| &= \frac{\sqrt{1+7}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_{eq,2}$ e $x_{eq,3}$ sono punti di equilibrio A.S. STABILI.

(6)

$$b) \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + 4x_1^3(k) + \overbrace{[-4x_1^3(k) + v(k)]}^{u(k)} = \\ \quad = -\frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + v(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(k+1) = Ax(k) + Bv(k)$$

dove: • $x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

• $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Applicando la dinamica del sistema:

$$x(1) = A \underbrace{x(0)}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}} + Bv(0) = Bv(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bv(1) = ABv(0) + Bv(1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \end{bmatrix} = x(2)$$

$\Rightarrow$ sistema lineare nelle incognite $v(0)$ e $v(1)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0) \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(0) = 1, v(1) = 2}$$