COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 13.09.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1.

E' dato il sistema autonomo a tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k))$, descritto dalle equazioni:

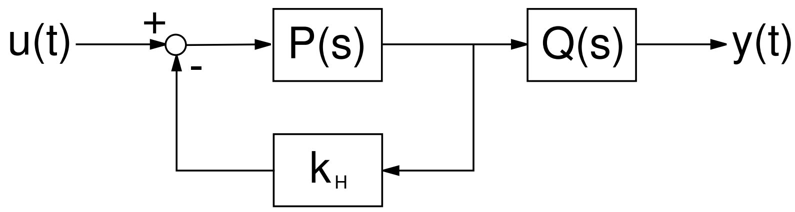
$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{2}\,x_1(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) &= -x_2(k) + 4\,x_3(k) \\ x_3(k+1) &= -\frac{2}{9}\,x_2(k) + x_3(k) + \alpha\,x_3^2(k), \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ è lo stato, e α è un parametro reale.

1. Posto $\alpha = 0$:
   (a) Studiare la stabilità e i modi del sistema.
   (b) Calcolare la risposta libera nello stato $\mathbf{x}(k)$ con condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [\ 1\ 0\ 0\ ]^T$.
2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \neq 0$.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in figura :



dove $P(s) = \dfrac{s+3}{s^2+s-4}$, $Q(s) = \dfrac{s+1}{s+4}$, e $k_H \in \mathbb{R}$ è un parametro incognito. Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema da u a y.

1. Determinare il valore di k_H in modo tale che $W(s)$ abbia un unico zero in -3.
2. Determinare il valore di k_H in modo tale che il guadagno in continua da u a y del sistema sia 0 dB.
3. Con il valore di k_H determinato al punto 2, tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta in frequenza.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_1(t) - 4x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= -2x_1(t) + x_2(t), \end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, e $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita.

1. Calcolare la risposta forzata nell'uscita $y(t)$ all'ingresso $u(t) = \sin(2t)\mathbf{1}(t)$, dove $\mathbf{1}(t)$ è la funzione gradino unitario, distinguendo la parte di risposta transitoria e la parte di risposta permanente.

SOLUZIONI

Esercizio 1

1. Quando $\alpha=0$, il sistema è LTI e può essere scritto nella forma:

$$x(k+1)=Ax(k), \quad \text{dove:} \quad A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) $$p_A(\lambda)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left[(\lambda+1)(\lambda-1)+\frac{8}{9}\right]=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2-\frac{1}{9}\right)=\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)$$

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{1}{3}$, $\lambda_3=-\frac{1}{3}$.

La matrice A ha tutti autovalori distinti, ed è dunque diagonalizzabile.

I modi del sistema sono: $\left(-\frac{1}{2}\right)^k, \left(\frac{1}{3}\right)^k, \left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

Dato che $|\lambda_i|<1$, $i=1,2,3$, il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE.

(b) $$A-\lambda_1 I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2-8x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

(ATTENZIONE - la variabile x_1 non compare nel sistema, ma va considerata comunque nella soluzione!)

$$\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=8x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\to v_1$ (autovettore di A relativo a λ_1)

Osserviamo che $x_0=v_1$!

Dunque, senza svolgere ulteriori calcoli, e chiamando v_2 un autovettore di A relativo a λ_2, e v_3 un autovettore di A relativo a λ_3, la risposta libera è:

$$x(k)=\alpha_1 v_1 \lambda_1^k+\alpha_2 v_2 \lambda_2^k+\alpha_3 v_3 \lambda_3^k$$

dove α_1, α_2 e α_3 sono le coordinate di x_0 relative alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Dato che $x_0 = v_1$, abbiamo che $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, e quindi:

$$x(k) = v_1 \lambda_1^k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Quando $\alpha \neq 0$, il sistema è nonlineare. Ne calcoliamo i punti di equilibrio.

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_3 \\ x_2 = -x_2 + 4x_3 \\ x_3 = -\frac{2}{9}x_2 + x_3 + \alpha x_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ \alpha x_3^2 - \frac{2}{9}x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ x_3\left(\alpha x_3 - \frac{4}{9}\right) = 0 \end{cases}$$

Dunque: $x_3 = 0$ oppure $x_3 = \dfrac{4}{9\alpha}$ (perché $\alpha \neq 0$).

Il sistema ha due punti di equilibrio:

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{eq,2} = \frac{4}{9\alpha}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo la matrice jacobiana.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1+2\alpha x_3 \end{bmatrix}$$

Valutando le matrici del sistema linearizzato intorno ai punti di equilibrio:

- $$A_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_{eq,1}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{9} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{autovalori: } -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$$

  $\Rightarrow$ Dato che tutti gli autovalori di A_1 hanno modulo < 1, <u>il punto $x_{eq,1}$ è AS. STABILE</u>.

- $$A_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_{eq,2}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{17}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{autovalori: } -\frac{1}{2}, \frac{1}{9}(4+\sqrt{97}) \simeq 1.5388, \frac{1}{9}(4-\sqrt{97}) \simeq -0.6499$$

  $\Rightarrow$ Dato che un autovalore di A_2 ha modulo > 1, <u>il punto $x_{eq,2}$ è INSTABILE</u>.

Esercizio 2

$$W(s) = Q(s) \cdot \frac{P(s)}{1+k_H P(s)} = \frac{s+1}{s+4} \frac{\frac{s+3}{s^2+s-4}}{1+k_H \frac{s+3}{s^2+s-4}} =$$

$$= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+4)\left[s^2+(k_H+1)s+3k_H-4\right]}$$

1. Essendo richiesto che $W(s)$ abbia un unico zero in -3, occorre che lo zero in -1 si cancelli con un polo. In particolare, -1 deve essere radice di $s^2+(k_H+1)s+3k_H-4$.

$$\Rightarrow \quad (-1)^2+(k_H+1)(-1)+3k_H-4=0$$

$$\Rightarrow \quad 1-k_H-1+3k_H-4=0 \quad \Rightarrow \quad 2k_H-4=0 \quad \Rightarrow \quad k_H=2$$

In questo modo:

$$W(s) = \frac{\cancel{(s+1)}(s+3)}{(s+4)\cancel{(s+1)}(s+2)} = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)}.$$

un unico zero in -3.

2. Il guadagno in continua del sistema (se esiste, ossia se il sistema è as. stabile), coincide con $W(0)$. Dunque:

$$W(0) = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot (3k_H-4)} = \frac{3}{4(3k_H-4)} = 1$$

0dB = 1 in valore assoluto.

$$\Rightarrow \quad 3k_H-4 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 3k_H = \frac{19}{4} \quad \Rightarrow \quad k_H = \frac{19}{12}$$

Dunque:

$$W(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+4)\left(s^2+\frac{31}{12}s+\frac{13}{4}\right)} = \frac{(s+1)(s+3)}{\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{9}{4}\right)(s+4)}$$

NB – I poli di $W(s)$ hanno tutti parte reale negativa, dunque esiste il guadagno in continua!

3. Mettiamo $W(s)$ in forma di Bode.

$$W(s) = \underbrace{\frac{1 \cdot 3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 4}}_{=1} \frac{(1+s)(1+\frac{s}{3})}{(1+3s)(1+\frac{4}{9}s)(1+\frac{s}{4})} = k_b \frac{(1+\tau_2 s)(1+\tau_4 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_3 s)(1+\tau_5 s)}$$

dove: $k_b = 1$, $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 1$, $\tau_3 = \frac{4}{9}$, $\tau_4 = \frac{1}{3}$, $\tau_5 = \frac{1}{4}$.

Diagramma del modulo

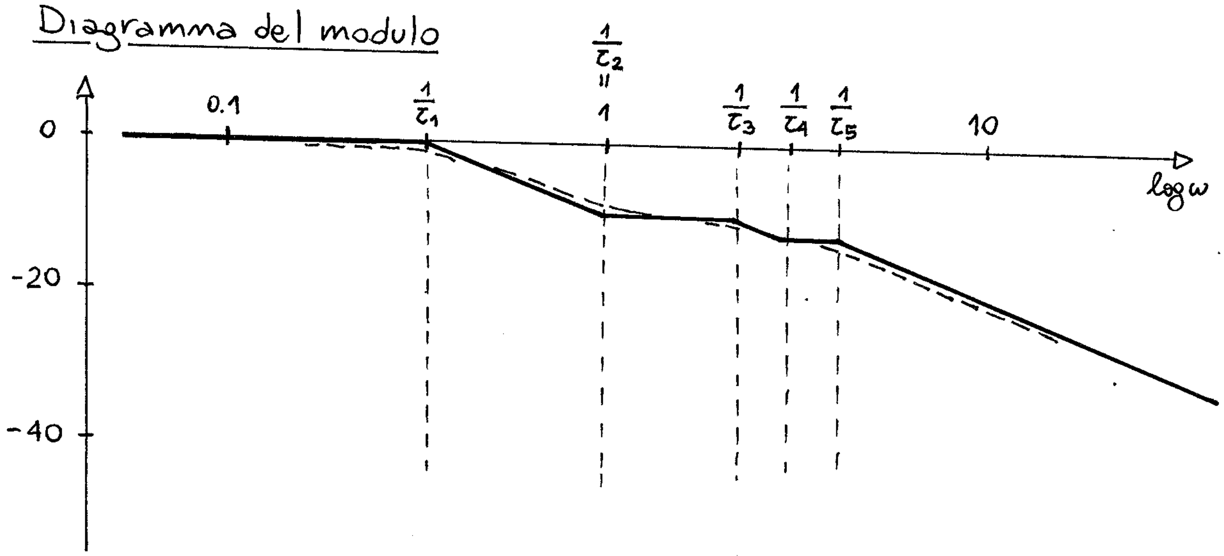
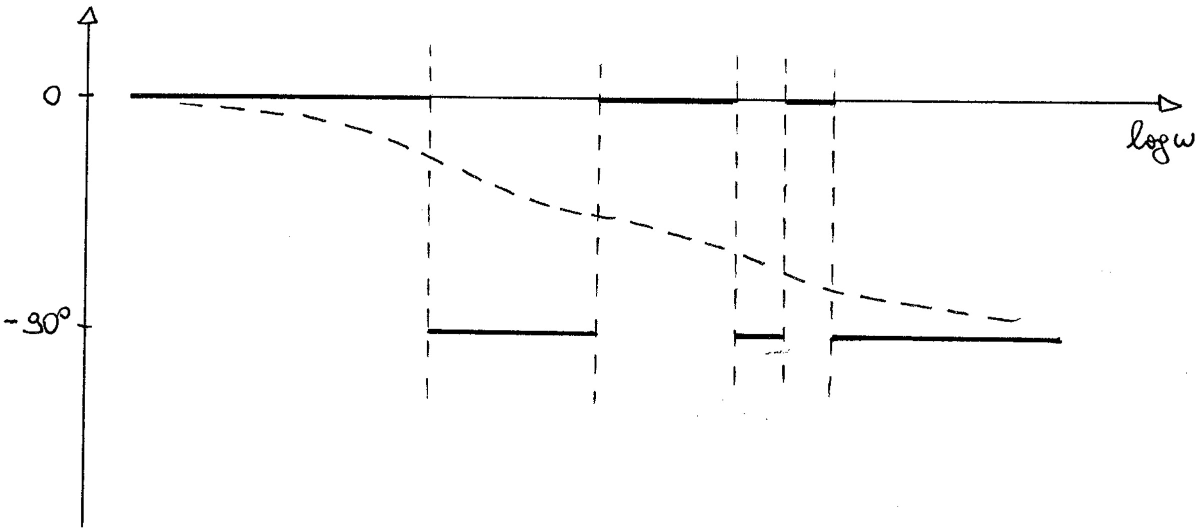


Diagramma della fase



Esercizio 3

La funzione di trasferimento del sistema è:

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B,$$

dove: $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{s-2}{(s+1)(s+3)}.$$

1. $u(t) = \sin(2t) \cdot \mathbb{1}(t) \Rightarrow U(s) = \frac{2}{s^2+4}$

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{2(s-2)}{(s+1)(s+3)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$A = \lim_{s\to -1} (s+1)Y(s) = \dots = -\frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s\to -3} (s+3)Y(s) = \dots = \frac{5}{13}$$

$$\frac{-\frac{3}{5}}{s+1} + \frac{\frac{5}{13}}{s+3} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{2s-4}{(s+1)(s+3)(s^2+4)}$$

Risolvendo il sistema risultante: $C = \frac{14}{65}$, $D = \frac{36}{65}$.

Antitrasformando:

$$y(t) = \Big[\underbrace{-\frac{3}{5}e^{-t} + \frac{5}{13}e^{-3t}}_{\text{RISPOSTA TRANSITORIA}} + \underbrace{\frac{14}{65}\cos(2t) + \frac{18}{65}\sin(2t)}_{\text{RISPOSTA PERMANENTE}} \Big] \mathbb{1}(t)$$