COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 28.07.2005

Candidato: **N. Matricola:**

I parte – Esercizio 1.

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k)$, dove:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

1. Si studino la stabilità e i modi del sistema.
2. Si determini la condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ in modo tale che $\mathbf{x}(2) = [\,0\ 3\ 2\,]^T$.
3. Determinare l'insieme delle condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ per cui $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}(k)\| = 0$.

I parte – Esercizio 2.

Sia dato il sistema nonlineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \log(2\,x_1(t) + 2\,x_2(t) + 1). \end{aligned}$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -2$, $\forall t$.
2. Per ciascun punto di equilibrio trovato, riportare le matrici $\mathbf{A}_{lin}$ e $\mathbf{B}_{lin}$ del corrispondente sistema linearizzato.
3. Studiare la stabilità per ciascun punto di equilibrio trovato.

II parte – Esercizio 3.

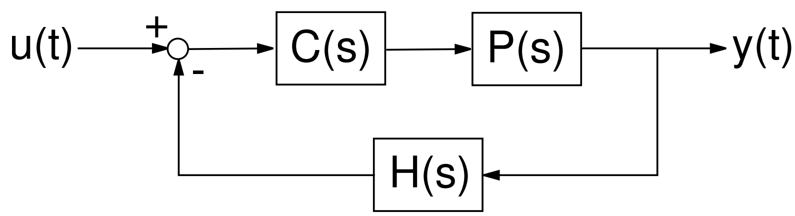
Dato un sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{s^2(s-0.1)}{s^2+2s+100},$$

tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta in frequenza, riportando con precisione i punti notevoli a -3dB.

II parte – Esercizio 4.

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dal seguente diagramma a blocchi:



dove $C(s) = \dfrac{1}{s-1}$, $P(s) = \dfrac{s-1}{s+2}$ e $H(s) = \dfrac{\alpha}{s-1}$, con α parametro reale.

1. Scrivere la funzione di trasferimento $W(s)$ da $u(t)$ a $y(t)$ del sistema.
2. Determinare il parametro α in modo tale che $W(s)$ abbia due poli coincidenti in $-\dfrac{1}{2}$.
3. Con il valore di α determinato al punto precedente:
   (a) Il sistema è asintoticamente stabile? E' ILUL stabile?
   (b) Assumendo $u(t) = \big(\sin(2t) - e^{-t}\big) \cdot \mathbf{1}(t)$, dove $\mathbf{1}(t)$ è la funzione gradino unitario, calcolare la risposta $y(t)$ del sistema, distinguendo quindi la parte di risposta transitoria e la parte di risposta permanente.

Soluzioni

Il compito è standard, quindi verrà illustrato lo svolgimento solo dei punti più impegnativi.

Esercizio 1

2. La soluzione generale del sistema dato è $x(k) = A^k x_0$, e quindi per $k=2$:

$$x(2) = A^2 x_0,$$

dove $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $A^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

Per determinare x_0 si deve dunque risolvere un sistema lineare.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 3 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 12 \\ 3 & -3 & 7 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & 12 \\ 0 & -12 & 16 & 8 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2} = 6 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

2. La funzione di trasferimento $W(s)$ è:

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)H(s)} = \frac{s-1}{(s-1)(s+2)+\alpha} = \frac{s-1}{s^2+s+(\alpha-2)}$$

Affinché $W(s)$ abbia due poli coincidenti in $-\frac{1}{2}$, deve risultare:

$$s^2+s+(\alpha-2) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}\right) = s^2+s+\frac{1}{4}$$

e quindi: $\alpha-2=\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha=\frac{9}{4}$

3.a. Il sistema è ILUL stabile (perché i poli di $W(s)$ hanno entrambi parte reale negativa), ma non è asintoticamente stabile perché nel prodotto $C(s)\cdot P(s)$ c'è una cancellazione instabile (il polo in 1 di $C(s)$ si cancella con lo zero in 1 di $P(s)$).