COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 15.07.2005

Candidato: **N. Matricola:**

I parte – Esercizio 1.

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k)$, dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}+a & \frac{1}{4}-a & -\left(\frac{1}{4}+a\right) \\ \frac{1}{4}+a & -\left(\frac{1}{4}+a\right) & \frac{1}{4}-a \end{bmatrix}$$

e $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Si studi la stabilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
2. Si determini il parametro a cosicché $(-2)^k$ sia un modo del sistema.
3. Con il valore di a determinato al punto precedente:
   (a) Calcolare la risposta libera nell'uscita $y(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k)$ con la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [\ 1\ \ -1\ \ 0\ ]^T$ e $\mathbf{C} = [\ 0\ \ 1\ \ -1\ ]$.
   (b) Determinare l'insieme delle condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ per cui $\lim_{k\to\infty} y(k) = 0$.

I parte – Esercizio 2.

Sia dato il sistema nonlineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \sin\big(x_1(t)x_2(t)\big) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_2(t) + x_2(t). \end{aligned}$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, $\forall t$.
2. Per un punto di equilibrio a scelta tra quelli trovati, riportare le matrici $\mathbf{A}_{lin}$ e $\mathbf{B}_{lin}$ del corrispondente sistema linearizzato.
3. Studiare la stabilità per un punto di equilibrio a scelta tra quelli trovati.

II parte – Esercizio 3.

Dato un sistema a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10\,s^2}{(s+0.1)(s^2+2s+100)},$$

tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta in frequenza, riportando con precisione i punti notevoli a -3dB.

II parte – Esercizio 4.

Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto in forma di stato dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t),
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}$ è l'ingresso, e $y \in \mathbb{R}$ è l'uscita.

1. Scrivere la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ del sistema.
2. Assumendo $u(t) = \big(\sin(t)+2\big)\cdot \mathbf{1}(t)$ e $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{1}(t)$ è la funzione gradino unitario, calcolare la risposta $y(t)$ del sistema.

SOLUZIONI

Esercizio 1

1. Il polinomio caratteristico della matrice A e':

$$p_A(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \left(\frac{1}{4} - a\right) & \frac{1}{4} + a \\ \frac{1}{4} + a & \lambda - \left(\frac{1}{4} - a\right) \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \left[\left(\lambda - \left(\frac{1}{4} - a\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + a\right)^2 \right] =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \quad \lambda^2 - 2\left(\frac{1}{4} - a\right)\lambda + \left(\frac{1}{4} - a\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + a\right)^2 \Big] =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \left[\lambda^2 - 2\left(\frac{1}{4} - a\right)\lambda + \cancel{\frac{1}{16}} - \frac{a}{2} + \cancel{a^2} - \cancel{\frac{1}{16}} - \frac{a}{2} - \cancel{a^2} \right] =$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \left[\lambda^2 - 2\left(\frac{1}{4} - a\right)\lambda - a \right]$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda + 2a)$$

$$\Delta = 4\left(\frac{1}{4} - a\right)^2 + 4a =$$

$$= \frac{1}{4} - 2a + 4a^2 + 4a =$$

$$= \frac{1}{4} + 2a + 4a^2 = 2\left(\frac{1}{4} + a\right)^2$$

$$\lambda = \frac{2\left(\frac{1}{4} - a\right) \pm 2\left(\frac{1}{4} + a\right)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2a \end{cases}$$

Gli autovalori di A sono dunque:

$\lambda_1 = -\frac{1}{4}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_3 = -2a$

Dato che $|\lambda_1| = \frac{1}{4} < 1$ e $|\lambda_2| = \frac{1}{2} < 1$, la stabilita' del sistema dipende da $|\lambda_3|$.

- Se $|\lambda_3| < 1$, cioe' $|a| < \frac{1}{2}$ (equivalentemente, $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$), il sistema e' <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u>.
- Se $|\lambda_3| = 1$, cioe' $a = \pm\frac{1}{2}$, il sistema e' <u>STABILE</u>.
- Se $|\lambda_3| > 1$, cioe' $|a| > \frac{1}{2}$ (equivalentemente, $a < -\frac{1}{2}$ oppure $a > \frac{1}{2}$), il sistema e' <u>INSTABILE</u>.

2. Affinche' $(-2)^k$ sia un modo del sistema, occorre che -2 sia un autovalore della matrice A.

Dunque: $\lambda_3 = -2a = -2 \iff \boxed{a=1}$

3. Poniamo $a=1$. Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

a) Si ha che:

$$y(k) = Cx(k) = CA^k x_0 .$$

Dato che la matrice A ha tutti gli autovalori distinti:

$\lambda_1 = -\frac{1}{4}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_3 = -2$,

essa e' diagonalizzabile, ed esiste $T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ non singolare tale che:

$$T^{-1}AT = \tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$A^k = T\tilde{A}^k T^{-1}, \quad \text{dove} \quad \tilde{A}^k = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{4})^k & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix}.$$

Segue che:

$$y(k) = CT\tilde{A}^k T^{-1} x_0 =$$

$$= \alpha_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^k Cv_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k Cv_2 + \alpha_3 (-2)^k Cv_3$$

dove $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono le coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, ossia risolvono: $T\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = x_0$.

Per ricavare v_1 ($\equiv$ autovettore di A relativo a λ_1):

$$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = \alpha$: $\begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}$

Per ricavare v_2 ($\equiv$ autovettore di A relativo a λ_2):

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = \alpha$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$

Per ricavare v_3 ($\equiv$ autovettore di A relativo a λ_3):

$$A-\lambda_3 I = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = \alpha$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$

Per calcolare $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$T\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = x_0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

In conclusione:

$$y(k) = \underset{\alpha_1}{1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \underset{Cv_1}{1} + \underset{\alpha_2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \underset{Cv_2}{(-2)} + \underset{\alpha_3}{(-1)} \cdot (-2)^k \cdot \underset{Cv_3}{0} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

b) $$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{k\to\infty} \left[\alpha_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^k \underbrace{Cv_1}_{=1} + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{Cv_2}_{=-2} + \alpha_3 (-2)^k \underbrace{Cv_3}_{=0} \right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\alpha_1 \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^k}_{\to 0} - 2\alpha_2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\to 0} \right] = 0$$

<u>PER OGNI</u> condizione iniziale x_0.

Esercizio 2

1. Per determinare i punti di equilibrio del sistema, risolviamo:

$$\begin{cases} 0 = \sin(x_1 x_2) + u \\ 0 = x_1 x_2 + x_2 \end{cases}$$

con $u = -1$.

Dunque:

$$\begin{cases} \sin(x_1 x_2) = 1 \\ x_1 x_2 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 x_2 = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \\ x_2 = -x_1 x_2 = -\frac{\pi}{2} \mp 2k\pi \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Infine:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi}{x_2} = \dfrac{\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi}{-\frac{\pi}{2} \mp 2k\pi} = \dfrac{\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi}{-\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)} = -1 \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} \mp 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dunque tutti i punti di equilibrio del sistema sono i punti:

$$x_k = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{\pi}{2} \mp 2k\pi \end{bmatrix}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Scegliendo $k=0$, consideriamo il punto di equilibrio $x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$.

$$A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ u=-1}} = \left.\begin{bmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) \\ x_2 & x_1 + 1 \end{bmatrix}\right|_{\substack{x = x_0 \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x = x_0 \\ u=-1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. La matrice A_{lin} ha due autovalori in 0, quindi non è possibile dire niente sulla stabilità del punto di equilibrio x_0 utilizzando il metodo di Lyapunov indiretto.

Esercizio 3

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{10 s^2}{(s+0.1)(s^2+2s+100)} = \frac{10}{0.1 \cdot 100} \frac{s^2}{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left(1+\frac{2s}{100}+\frac{s^2}{100}\right)} =$$

$$= \frac{s^2}{(1+10s)\left(1+\frac{s}{50}+\frac{s^2}{100}\right)} = k_b s^2 \frac{1}{(1+\tau s)\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

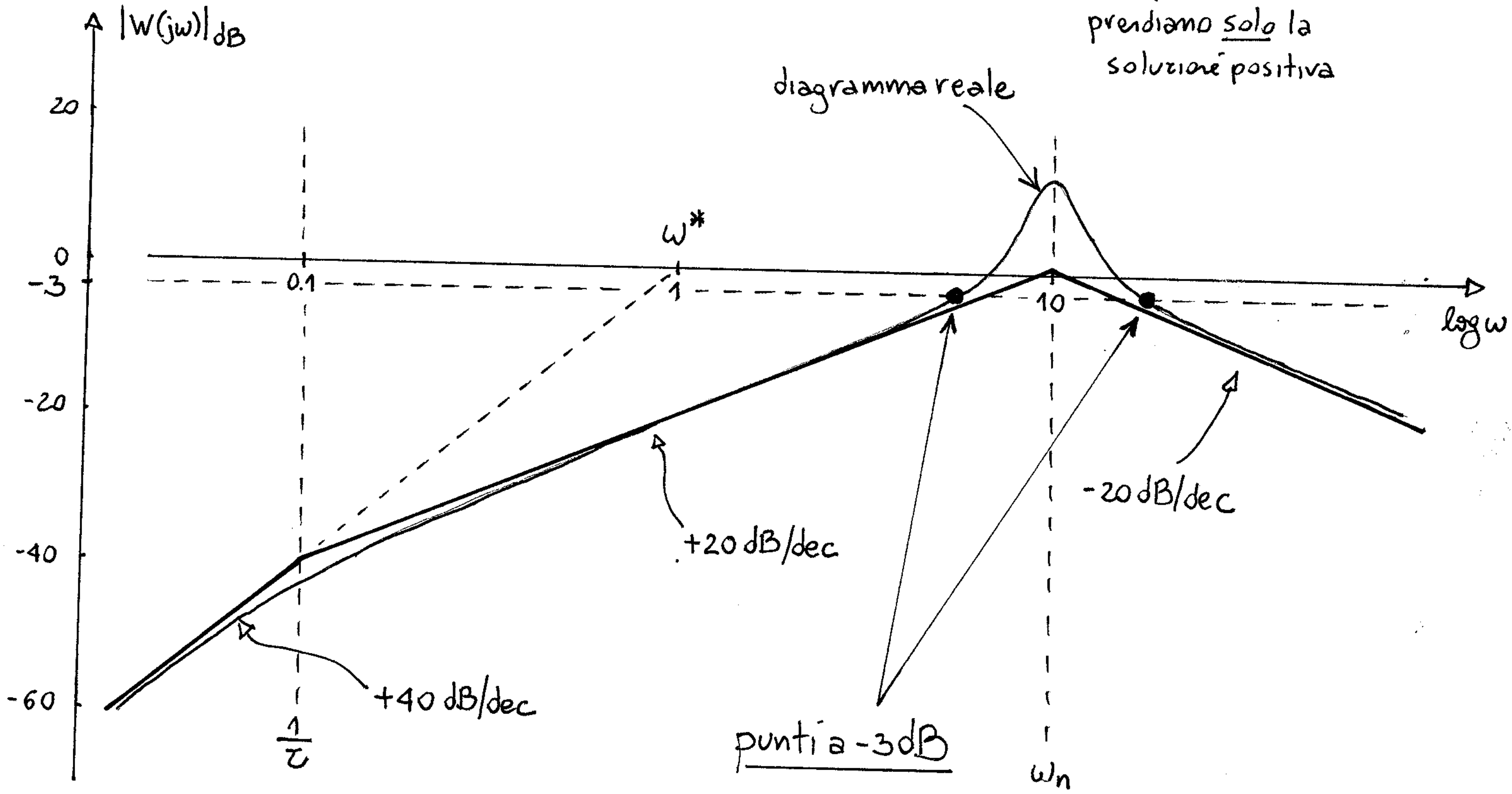
dove:

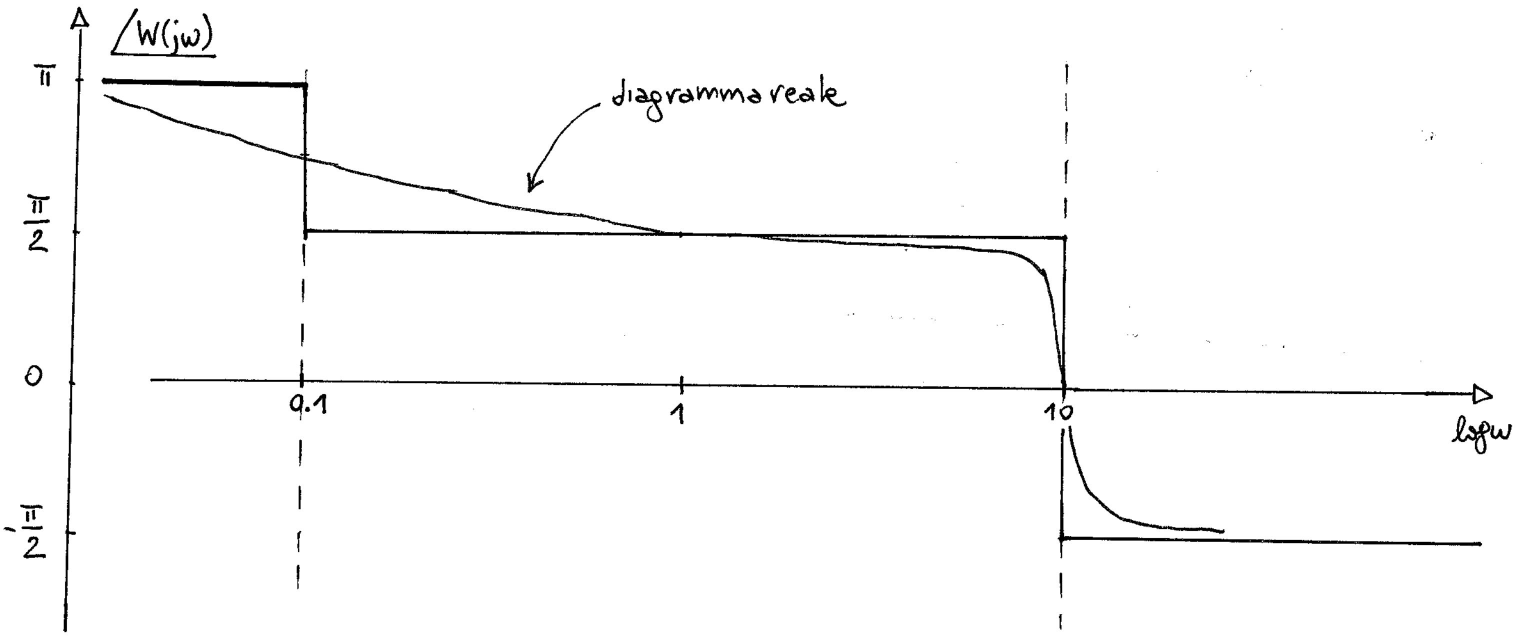
- $k_b = 1$
- $\tau = 10$
- $\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10$
- $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{50} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{100}\omega_n = \frac{1}{100}\cdot 10 = \frac{1}{10} = 0.1$

Per "posizionare" correttamente il diagramma del modulo, risolviamo:

$$\left|k_b s^2\right|_{s=j\omega} = 1 \Rightarrow |k_b|\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{|k_b|} = 1 \Rightarrow \omega^* = 1$$

prendiamo solo la soluzione positiva





Esercizio 4

1. $W(s)$ è dato dall'espressione:

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)-2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2+s-2} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

2. L'ingresso $u(t)$ può essere scomposto nella somma di due contributi:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

dove $u_1(t) = \sin(t) \cdot \mathbb{1}(t)$ e $u_2(t) = 2 \cdot \mathbb{1}(t)$.

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$U_1(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad\qquad U_2(s) = \frac{2}{s}$$

Dunque:

$$Y(s) = W(s)U(s) = W(s)\left[U_1(s) + U_2(s)\right] = \underbrace{W(s)U_1(s)}_{Y_1(s)} + \underbrace{W(s)U_2(s)}_{Y_2(s)}$$

da cui:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

dove $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_1(s)\right]$ e $y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_2(s)\right]$.

- $Y_1(s) = W(s)U_1(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s+2)} \cdot \dfrac{1}{s^2+1} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+1}$

$$A = \lim_{s\to 1} (s-1)Y_1(s) = \lim_{s\to 1} \frac{s+1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{s\to -2} (s+2)Y_1(s) = \lim_{s\to -2} \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{15}$$

Infine, per calcolare C e D:

$$\frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{15}\frac{1}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{\left(C+\frac{2}{5}\right)s^3 + \left(C+D+\frac{3}{5}\right)s^2 + \left(-2C+D+\frac{2}{5}\right)s + \left(-2D+\frac{3}{5}\right)}{(s-1)(s+2)(s^2+1)}$$

Uguagliando i numeratori del primo e dell'ultimo termine:

$$C+\frac{2}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad C=-\frac{2}{5}$$

$$C+D+\frac{3}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{ok!}$$

$$-2C+D+\frac{2}{5}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{ok!}$$

$$-2D+\frac{3}{5}=1 \quad \Rightarrow \quad D=-\frac{1}{5}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{15}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)\right)\mathbb{1}(t)$$

- $Y_2(s) = W(s)U_2(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\cdot\frac{2}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$

$$A = \lim_{s\to 0} s\,Y_2(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2s+2}{(s-1)(s+2)} = -1$$

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)Y_2(s) = \lim_{s\to 1}\frac{2s+2}{s(s+2)} = \frac{4}{3}$$

$$C = \lim_{s\to -2}(s+2)Y_2(s) = \lim_{s\to -2}\frac{2s+2}{s(s-1)} = -\frac{1}{3}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + \frac{4}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2}\right] = \left(-1+\frac{4}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}\right)\mathbb{1}(t)$$

Infine:

$$y(t) = \left[-1+\frac{5}{3}e^t - \frac{4}{15}e^{-2t} - \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)\right]\mathbb{1}(t).$$