I Prova in Itinere di Fondamenti di Automatica 09.06.2005

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}
2\,\ddot{y}_1(t) - \dot{y}_1(t) + y_1(t) - 3\,y_2(t) &= 2\,u_1(t) - u_2(t) \\
\dot{y}_2(t) - y_1(t) + 2\,y_2(t) &= -\frac{1}{2}\,u_2(t),
\end{aligned}$$

dove y_1 e y_2 sono le uscite, e u_1 e u_2 sono gli ingressi del sistema. Si determini un modello del sistema nella forma di spazio di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t),
\end{aligned}$$

definendo in maniera opportuna lo stato $\mathbf{x}(t)$, il vettore degli ingressi $\mathbf{u}(t)$ e il vettore delle uscite $\mathbf{y}(t)$.

Esercizio 2

Dato il sistema lineare a tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k),$$

determinare una condizione iniziale $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$, se esiste, per cui lo stato va a zero in un numero finito di passi (cioè $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ per qualche k).

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$, dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\,a^2 & a^2 - 1 & \frac{1}{2}\,a^2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

e $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Si studi la stabilità del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.
2. Posto $a = 1$:
   (a) Determinare i modi del sistema.
   (b) Calcolare $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$, dove $\mathbf{x}(t)$ è la risposta libera del sistema con la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [\ 3\ \ 0\ \ 1\ ]^T$.
   (c) Determinare l'insieme delle condizioni iniziali $\mathbf{x}(0)$ per cui $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$.

Esercizio 4

Sia dato il sistema nonlineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1^2(k)x_2(k) + \alpha\, u(k)x_1(k) \\ x_2(k+1) &= -\frac{1}{2}\, x_2(k) + 3\, u(k), \end{aligned}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 1$, $\forall k$.

2. Per ciascun punto di equilibrio determinato al punto 1, riportare le matrici $\mathbf{A}_{lin}$ e $\mathbf{B}_{lin}$ del corrispondente sistema linearizzato.

3. Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la stabilità dei punti di equilibrio determinati al punto 1.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

STATO $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

INGRESSI $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, USCITE $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}\dot{y}_1 + \frac{3}{2}y_2 + u_1 - \frac{1}{2}u_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + u_1 - \frac{1}{2}u_2$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y}_2 = y_1 - 2y_2 - \frac{1}{2}u_2 =$$

$$= x_1 - 2x_3 - \frac{1}{2}u_2$$

$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$, dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

$\Rightarrow y = Cx + Du$, dove:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2.

Il sistema è nella forma:

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

dove $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-4)-4 = \lambda^2 - 4\lambda - \lambda + \cancel{4} - \cancel{4} = \lambda(\lambda-5)$$

Dunque gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 5$$

Dato che A ha tutti autovalori distinti, essa è <u>diagonalizzabile</u>.
Sia v_1 un autovettore di A relativo a λ_1, e v_2 un autovettore di A relativo a λ_2.
Allora la risposta libera del sistema si può scrivere nella forma:

$$x(k) = \lambda_1^k \cdot \alpha_1 v_1 + \lambda_2^k \cdot \alpha_2 v_2 = 0^k \cdot \alpha_1 v_1 + 5^k \cdot \alpha_2 v_2$$

dove α_1 e α_2 sono le coordinate della condizione iniziale $x(0)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$, cioè:

$$x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2.$$

Osservando che:

$$0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=1,2,3,\dots \end{cases}$$

mentre $5^k \neq 0$ per ogni k (e inoltre $5^k \to \infty$ per $k \to \infty$), le condizioni iniziali $x(0) \neq 0$ per cui lo stato va a zero in un numero finito di passi (in particolare, in <u>un</u> passo) sono tutte quelle per cui $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 = 0$, ossia:

$$x(0) = \alpha_1 v_1 \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0.$$

<u>Per il calcolo di v_1:</u>

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sommo alla seconda riga la prima moltiplicata per 2

sistema omogeneo associato

v_1

Esercizio 3.

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \underset{\substack{\text{sviluppando il} \\ \text{determinante rispetto} \\ \text{alla seconda colonna}}}{=} (\lambda - (a^2-1)) \det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = (\lambda - (a^2-1))(\lambda^2 + 3\lambda + 2) =$$
$$= (\lambda - (a^2-1))(\lambda+1)(\lambda+2)$$

Gli autovalori di A sono dunque:

$\lambda_1 = a^2 - 1$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = -2$

ANALISI DELLA STABILITÀ

- Se $a^2 - 1 < 0$, cioè $-1 < a < 1$, la matrice A ha tutti gli autovalori negativi
  $\Rightarrow$ SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE
- Se $a^2 - 1 = 0$, cioè $a = \pm 1$, la matrice A ha tutti gli autovalori negativi e uno nullo, e quello nullo ha molteplicità algebrica e geometrica uguali (in particolare, pari a 1).
  $\Rightarrow$ SISTEMA STABILE
- Se $a^2 - 1 > 0$, cioè $a < -1$ oppure $a > 1$, un autovalore di A è positivo
  $\Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

Posto $a = 1$, gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = -2$

La matrice A ha tre autovalori distinti, ed è quindi diagonalizzabile.

I modi del sistema sono: $\underset{e^{\lambda_1 t}}{1}$, $\underset{e^{\lambda_2 t}}{e^{-t}}$, $\underset{e^{\lambda_3 t}}{e^{-2t}}$

La risposta libera del sistema può essere scritta nella forma:

$$x(t) = \alpha_1 v_1 + e^{-t} \alpha_2 v_2 + e^{-2t} \alpha_3 v_3$$

dove:

- v_1 è un autovettore di A relativo a λ_1
- v_2 " " " " " " " λ_2
- v_3 " " " " " " " λ_3

e α_1, α_2 e α_3 sono le coordinate di $X(0)$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, cioè:

$$X(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 .$$

Per il calcolo di v_1, v_2 e v_3:

- $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ - SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO -

Posto $x_2 = \alpha$:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

- $A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ - SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO -

Posto $x_1 = \alpha$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -x_3 = \alpha \\ x_3 = -x_1 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

⑤

- $A-\lambda_3 I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ - SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO-

Posto $x_3 = \alpha$:

$\begin{cases} x_1 = x_3 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$

Dall'uguaglianza $x(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, si ottiene il sistema:

$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = 3 - \alpha_2 = 3 + \alpha_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_1 + 3 + \alpha_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ 2\alpha_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$

Dunque, $x(t) = -v_1 + e^{-t} v_2 + 2e^{-2t} v_3$, e di conseguenza:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \left[-v_1 + \underbrace{e^{-t}}_{0} v_2 + 2\underbrace{e^{-2t}}_{0} v_3 \right] = -v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'insieme delle condizioni iniziali $x(0)$ per cui $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$ si ottiene imponendo $\alpha_1 = 0$ nell'espressione:

$$x(t) = \alpha_1 v_1 + e^{-t}\alpha_2 v_2 + e^{-2t}\alpha_3 v_3$$

Dunque:

$$x(0) \in \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{sottospazio lineare generato da } v_2 \text{ e } v_3}(v_2, v_3) = \left\{ v = \alpha v_2 + \beta v_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 4.

I punti di equilibrio del sistema si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2 x_2 + \alpha u x_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} x_2 + 3u \end{cases} \Rightarrow \quad x = f(x,u)$$

con $u = u_{eq} = 1$. Dunque:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2 x_2 + \alpha x_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} x_2 + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ \frac{3}{2} x_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_1^2 + \alpha x_1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1^2 - (1-\alpha) x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \left[2x_1 - (1-\alpha) \right] = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1-\alpha}{2} \end{cases}$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Le matrici jacobiane rispetto a x e u sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 + \alpha u & x_1^2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

<u>Matrici del sistema linearizzato intorno a $(x_{eq,1}, u_{eq})$</u>

$$A_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_{eq,1} \\ u = u_{eq}}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x = x_{eq,1} \\ u = u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $A_{lin,1}$ sono $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Dunque il punto di equilibrio $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è:

- <u>ASINTOTICAMENTE STABILE</u> se $|\alpha| < 1$, cioè $-1 < \alpha < 1$
- <u>INSTABILE</u> se $|\alpha| > 1$, cioè $\alpha < -1$ oppure $\alpha > 1$

Nulla si può dire se $|\alpha| = 1$, cioè $\alpha = \pm 1$.

$\boxed{\text{NOTA- Si osservi che questa discussione vale perché } |\lambda_2| = \frac{1}{2} < 1.}$

Matrici del sistema linearizzato intorno a $(x_{eq,2}, u_{eq})$

$$A_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{eq,2}\\u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 2-\alpha & \frac{(1-\alpha)^2}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_{eq,2}\\u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $A_{lin,2}$ sono $\lambda_1 = 2-\alpha$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Dunque il punto di equilibrio $(x_{eq,2}, u_{eq})$ è:

- ASINTOTICAMENTE STABILE se $|2-\alpha| < 1$, cioè $1 < \alpha < 3$
- INSTABILE se $|2-\alpha| > 1$, cioè $\alpha < 1$ oppure $\alpha > 3$

Nulla si può dire se $|2-\alpha| = 1$, cioè $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 3$.