COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA 07.12.2004

Esercizio 1.

Un sistema massa-molla-smorzatore è descritto dall'equazione differenziale

$$M\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

dove $y(t)$ rappresenta la posizione della massa all'istante t e $u(t)$ è la forza esterna applicata alla massa. I valori della massa e del coefficiente d'attrito sono rispettivamente $M = 1$ e $\beta = 2$, mentre il valore della costante elastica della molla K è incognito.

1. Determinare una rappresentazione in forma di stato del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, e le corrispondenti matrici A, B, C e D.
2. Determinare per quali valori di $K > 0$ il sistema non ha modi periodici.
3. Supponendo che la forza $u(t)$ sia generata dall'attuatore meccanico modellato in Figura 1, con $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$ e $r(t) = \delta_{-1}(t)$ (gradino unitario), determinare i valori di $K > 0$ tali che l'ampiezza della risposta a regime permanente nell'uscita $y(t)$ è maggiore di 1.

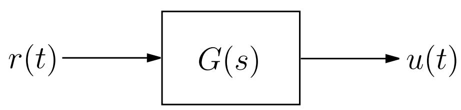

Figura 1

Esercizio 2.

Si consideri il sistema nonlineare a tempo continuo descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{\alpha}\, x_1(t) + x_2^3(t)\\ \dot{x}_2(t) &= u(t)\, x_1(t) + \alpha\, x_2(t)\end{aligned}$$

dove α è un parametro reale non nullo ($\alpha \neq 0$).

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema per $u(t) = 2$.
2. Per ciascun punto di equilibrio trovato, scrivere le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato.
3. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati al variare di $\alpha \neq 0$.

Esercizio 3.

Dato il sistema lineare a tempo continuo Σ descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita:

$$\Sigma \quad : \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &=& x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& -x_1(t) - 2\,x_2(t) + x_3(t) - u(t) \\ \dot{x}_3(t) &=& 2\,x_1(t) - x_3(t) \\ y(t) &=& x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. Determinare i modi del sistema.
2. Calcolare la risposta libera nello stato $x(t)$ con condizione iniziale $x_0 = [1\ 0\ 2]^T$.
3. Tracciare i diagrammi di Bode (asintotico e reale) della funzione di trasferimento del sistema da $u(t)$ a $y(t)$.
4. Calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ relativa al segnale di ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$.