Esame di Fondamenti di Automatica 09.10.2003

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1

Si consideri il sistema tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{2}x_1(k) + \frac{\alpha}{x_2(k)} + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) - x_2(k) \end{aligned}$$

nel quale $x(k) = [\ x_1(k)\ x_2(k)\ ]^T$ è lo stato, $u(k)$ è l'ingresso e $y(k)$ è l'uscita.

1. Assumendo $u(k) = 0$, $\forall\, k$, calcolare gli stati di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio calcolati al punto (1).
3. Assumendo $\alpha = 0$, calcolare la risposta totale del sistema nell'uscita $y(k)$, relativa allo stato iniziale $x_0 = [\ 0\ \ -1\ ]^T$ e all'ingresso $u(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Esercizio 2

Un sistema massa-molla-smorzatore è descritto dall'equazione differenziale

$$M\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

nel quale $y(t)$ rappresenta la posizione della massa all'istante t e $u(t)$ è la forza esterna applicata alla massa. Il valore della massa è $M = 1$, mentre i valori della costante elastica K della molla e del coefficiente d'attrito β sono incogniti ($\beta \geq 0$, $K > 0$).

1. Determinare una rappresentazione di stato del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, e le corrispondenti matrici A, B, C e D.
2. Assumendo $\beta = 2$, studiare i modi propri del sistema al variare di $K > 0$.
3. Assumendo $\beta = 0$ e $K = 4$, calcolare la risposta del sistema nell'uscita $y(t)$ con condizioni iniziali nulle all'ingresso $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Distinguere la risposta complessiva in risposta permanente e risposta transitoria.

Esercizio 3

Un sistema lineare a tempo continuo con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ è descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-1000(s+0.1)(s-2)}{(s^2+2\,s+100)(s+20)}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode della corrispondente funzione di risposta in frequenza.
2. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente del sistema dato l'ingresso

$$u(t) = 5 + \frac{1}{\sqrt{520}}\sin(10\,t)\,, \quad t \geq 0$$

Tabella 1: Trasformate di Laplace utili

Funzione del tempo	Descrizione	Trasformata di Laplace
$\delta_{-1}(t) = \mathbf{1}(t)$	gradino unitario	$\frac{1}{s}$
$e^{a\,t}$	esponenziale	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(\omega\,t)$	sinusoide	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\,t)$	cosinusoide	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Tabella 2: Trasformate Z utili

a^k	$\frac{z}{z-a}$
$k\,a^k$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$