Esame di Fondamenti di Automatica 03.09.2003

Candidato: **N. Matricola:**

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo ($x \in \mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3+k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \triangleq C\,x(t) \end{aligned}$$

nel quale k è un parametro reale.

1. Studiare la stabilità e i modi propri del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
2. Assumendo ingresso nullo, determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ e per quali condizioni iniziali $x_0 = [\ \alpha\ \beta\ \gamma\ ]^T$ si hanno soluzioni periodiche (non identicamente nulle) in uscita.
3. Per il valore di k determinato al punto 2, calcolare la risposta del sistema con condizioni iniziali nulle all'ingresso $u(t) = 5\,e^{-2\,t}\,\delta_{-1}(t)$, dove $\delta_{-1}(t)$ è la funzione gradino unitario.

Esercizio 2

Dato il sistema nonlineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \ln x_2(k) + e^{u(k)} - 1 \\ x_2(k+1) = (1-e)\,x_1(k) + \big[x_2(k) - 1\big]\big[x_2(k) - \frac{1}{2}\,u^2(k) + \alpha\big] + x_2(k) \end{cases}$$

nel quale α è un parametro reale:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, $\forall k$.
2. Per ciascun punto di equilibrio determinato al punto 1, riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato ($\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{x}(k+1) = A_{lin}\,\tilde{x}(k) + B_{lin}\,\tilde{u}(k)$$

3. Discutere la stabilità del punto di equilibrio $x_{eq1} = [\ 0\ 1\ ]^T$ al variare del parametro α; discutere inoltre la stabilità degli altri punti di equilibrio per $\alpha = -e$.

Esercizio 3

Dato il sistema lineare a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-(s^2 - 1.5\,s - 1)}{(s^2 + 0.4\,s + 4)(s + 1.2)}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode della corrispondente funzione di risposta in frequenza.
2. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente del sistema dato l'ingresso

$$u(t) = [\,\frac{4}{25}\cos(2\,t) + 12\,]\,\delta_{-1}(t)$$

   dove $\delta_{-1}(t)$ è la funzione gradino unitario.

3. Indicare come è possibile estrarre dal diagramma di Bode tracciato al punto 1 le informazioni necessarie per il calcolo della risposta a regime permanente richiesta al punto 2.

Tabella 1: Trasformate di Laplace utili

Funzione del tempo	Descrizione	Trasformata di Laplace
$\delta_{-1}(t)$	gradino unitario	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{a\,t}$	esponenziale polinomiale	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\sin(\omega\,t)$	sinusoide	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\,t)$	cosinusoide	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$