

DIAGRAMMI DI BODE (ASINTOTICI E REALI) DEI FATTORI ELEMENTARI

Una funzione di trasferimento in forma di Bode è composta, a numeratore e denominatore, da fattori elementari del tipo

- k_b guadagno
- s^h zeri/poli nell'origine
- $1 + \tau s$ zeri/poli reali
- $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ zeri/poli complessi

Vediamo come tracciare i diagrammi di Bode di questi fattori elementari.

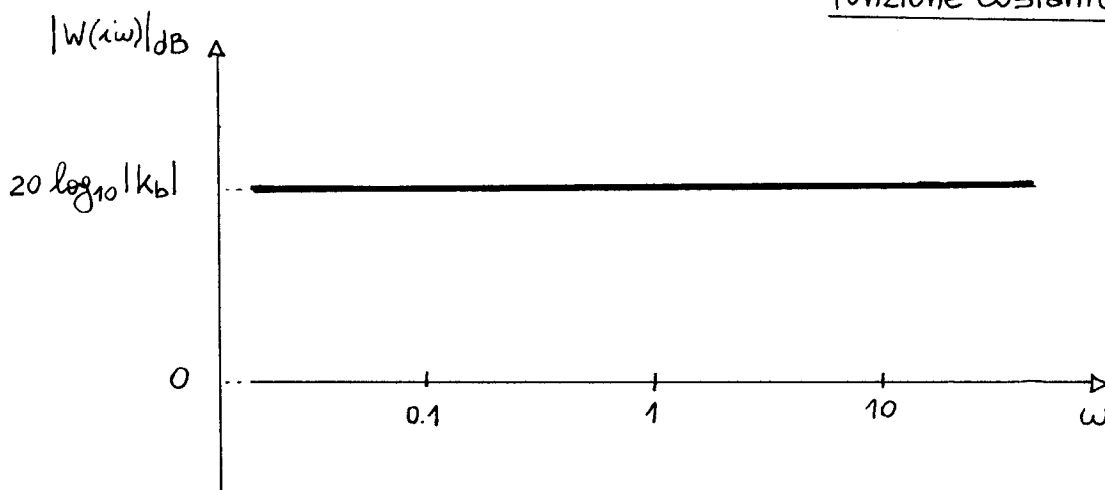
1. $W(s) = k_b$

$\Rightarrow W(i\omega) = k_b$

modulo

$|W(i\omega)| = |k_b| \Rightarrow |W(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |k_b|$

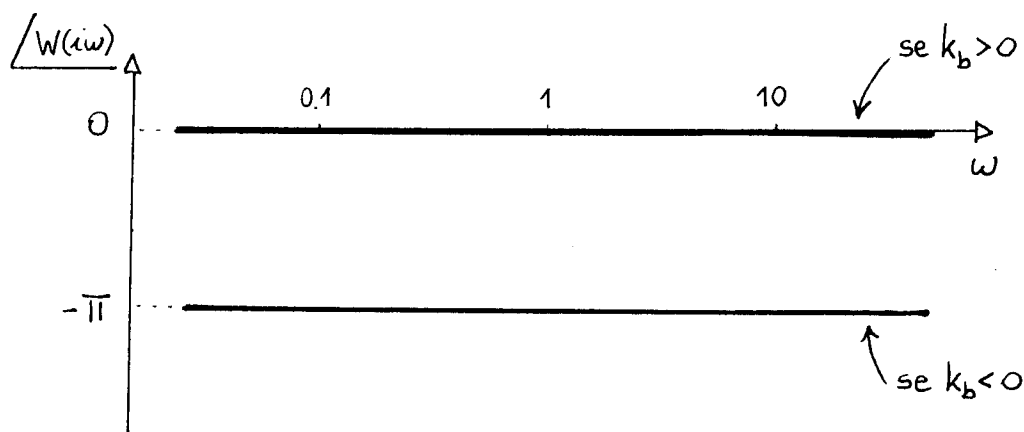
↓ funzione costante



fase

Se $k_b > 0$, $\angle k_b = 0$ (la fase di un numero reale positivo è 0)

Se $k_b < 0$, $\angle k_b = -\pi$ (la fase di un numero reale negativo è $-\pi$)



2. $W(s) = s^h$, $h = 1, 2, \dots$

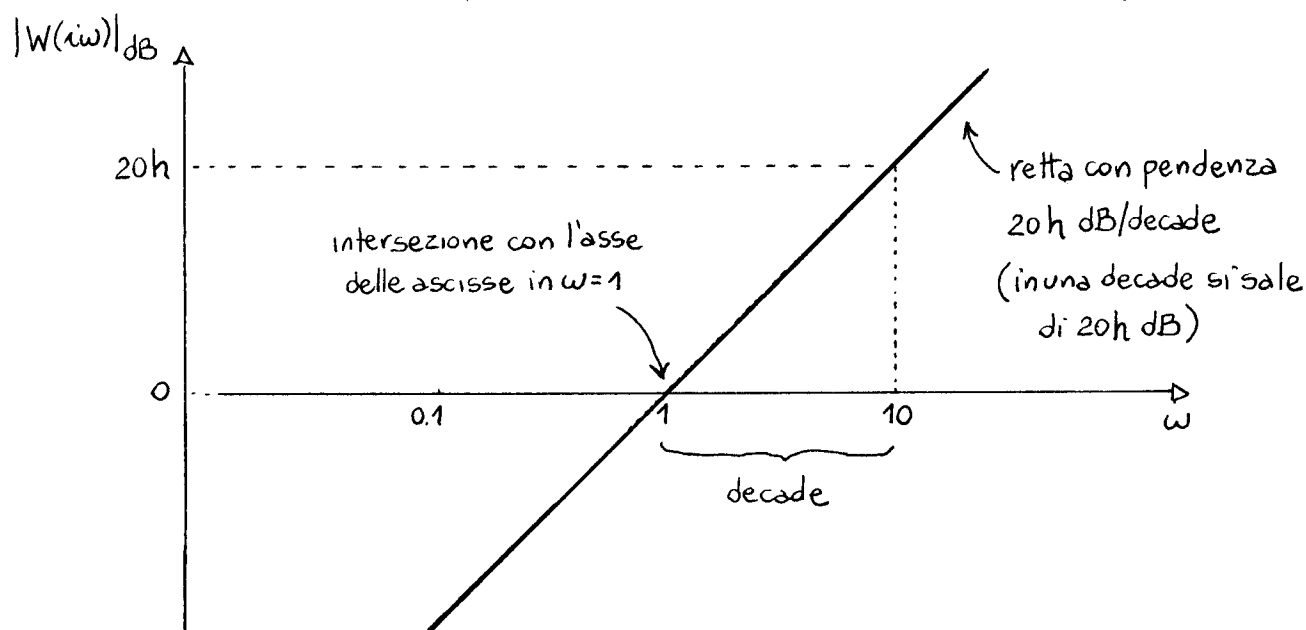
$\Rightarrow W(i\omega) = (i\omega)^h$

modulo

$|W(i\omega)| = |(i\omega)^h| = |i\omega|^h = \omega^h$

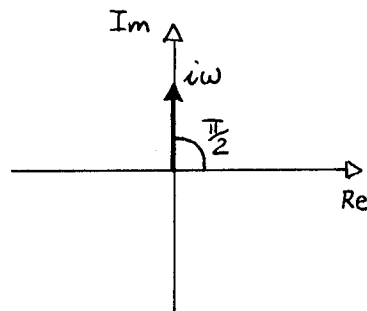
$\Rightarrow |W(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega^h = 20h \log_{10} \omega$

Utilizzando una scala logaritmica sulle ascisse, questa equazione rappresenta una retta con pendenza (coefficiente angolare) $20h$ dB/decade. Inoltre, la retta interseca l'asse delle ascisse (0 dB) in $\omega = 1$.

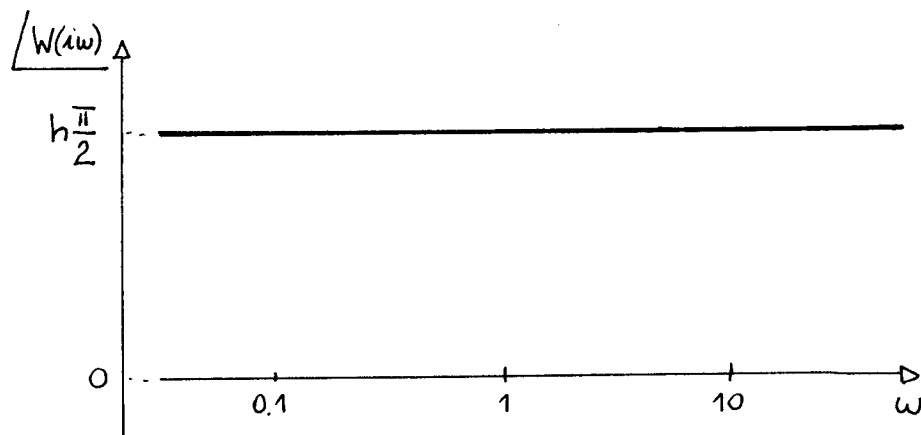


fase

$$\angle W(i\omega) = \angle (i\omega)^h = h \angle i\omega = h \frac{\pi}{2}$$



3



3. $W(s) = 1 + \tau s$, $\tau \neq 0$

$$\Rightarrow W(i\omega) = 1 + i\omega\tau$$

modulo

$$|W(i\omega)| = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\Rightarrow |W(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = 10 \log_{10} [1 + (\omega\tau)^2]$$

Studiamo il comportamento asintotico di questa funzione per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$.

- Se $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$, allora $(\omega\tau)^2$ è trascurabile rispetto a 1; quindi

$$|W(i\omega)|_{dB} \simeq 10 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{per } \omega \ll \frac{1}{|\tau|}$$

- Se $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$, allora 1 è trascurabile rispetto a $(\omega\tau)^2$; quindi

$$|W(i\omega)|_{dB} \simeq 10 \log_{10} (\omega\tau)^2 = 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| \quad \text{per } \omega \gg \frac{1}{|\tau|}$$

Utilizzando una scala logaritmica sulle ascisse,

questa equazione rappresenta una retta con pendenza 20 dB/decade.

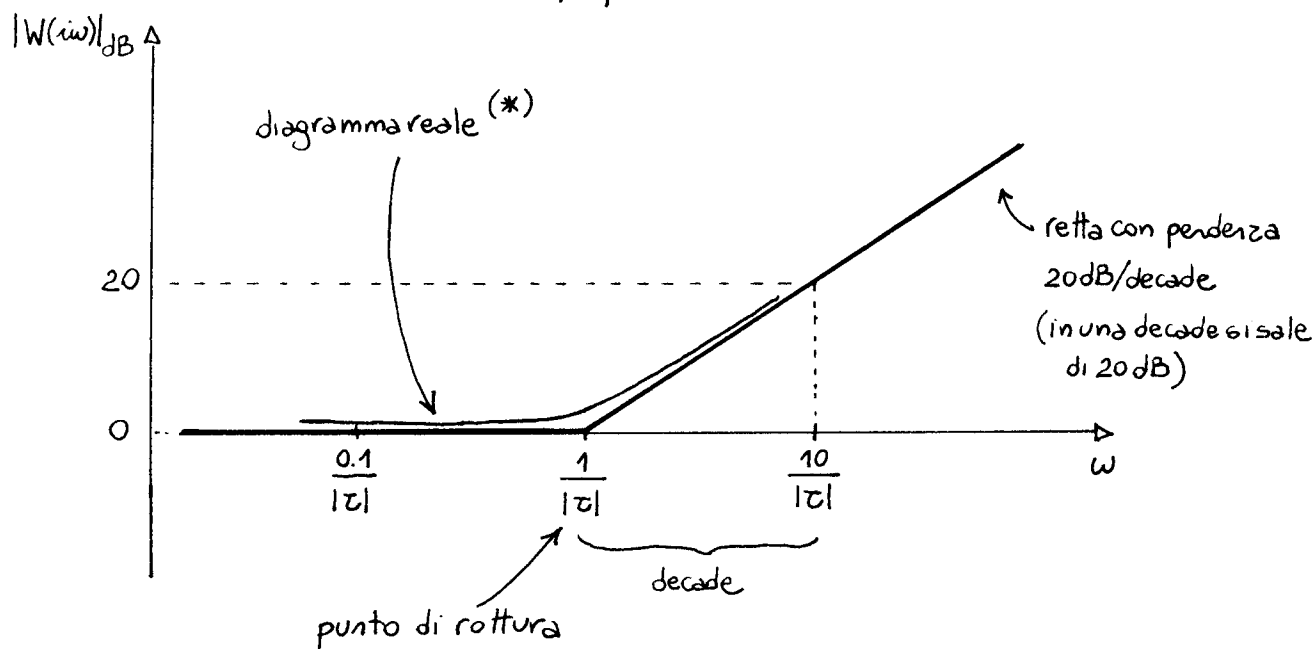
Inoltre, la retta interseca l'asse delle ascisse (0 dB) in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$.

Osserviamo inoltre che:

4

- se $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, $|W(i\frac{1}{|\tau|})|_{dB} = 10 \log_{10} [1 + (\frac{1}{|\tau|}\tau)^2] = 10 \log_{10} 2 \approx 3 \text{ dB}$.

Il diagramma di Bode asintotico del modulo approssima il diagramma reale con una linea spezzata formata dai due asintoti. I due asintoti si congiungono nel punto di rottura $\frac{1}{|\tau|}$.



(*) Per esempio, la correzione da apportare al diagramma asintotico in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ è circa 3dB (vedi sopra).

fase

$$\angle W(i\omega) = \angle 1 + i\omega\tau = \arctan(\omega\tau)$$

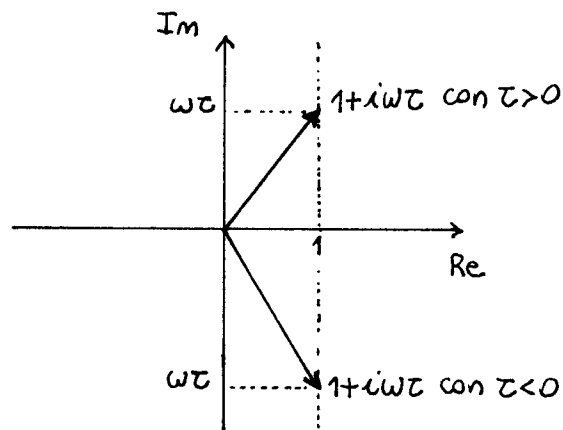
Distinguiamo due casi (vedi a lato):

CASO $\tau > 0$

Per $\omega \rightarrow 0$, $\arctan(\omega\tau) \rightarrow 0$

Per $\omega \rightarrow \infty$, $\arctan(\omega\tau) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

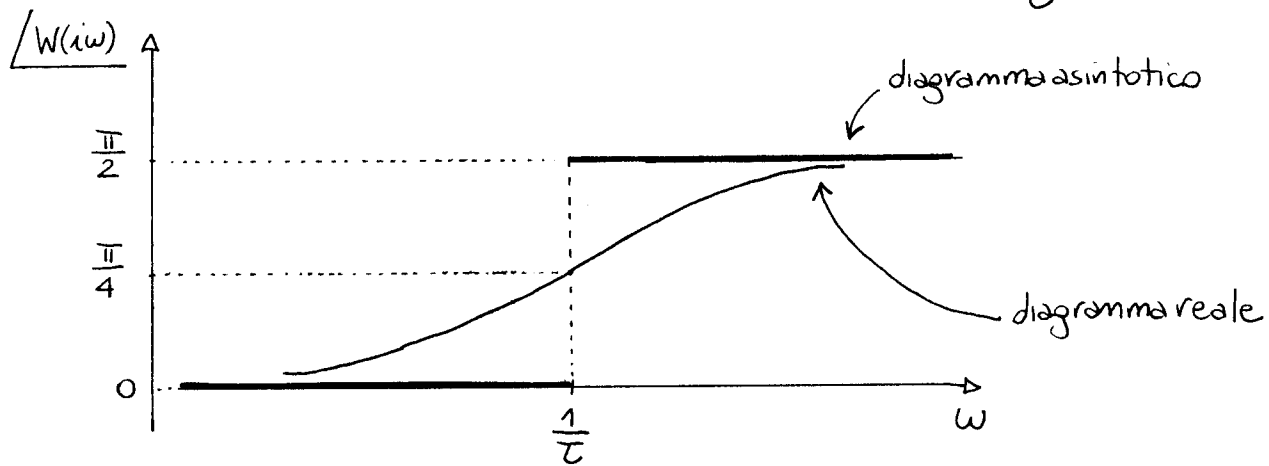
Inoltre, per $\omega = \frac{1}{\tau}$, $\arctan(\frac{1}{\tau}\tau) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.



Il diagramma di Bode asintotico della fase approssima il diagramma reale con due tratti costanti formati dai due asintoti. Il "salto" tra i due

asintoti avviene in corrispondenza del punto di rottura $\frac{1}{\tau}$.

(5)

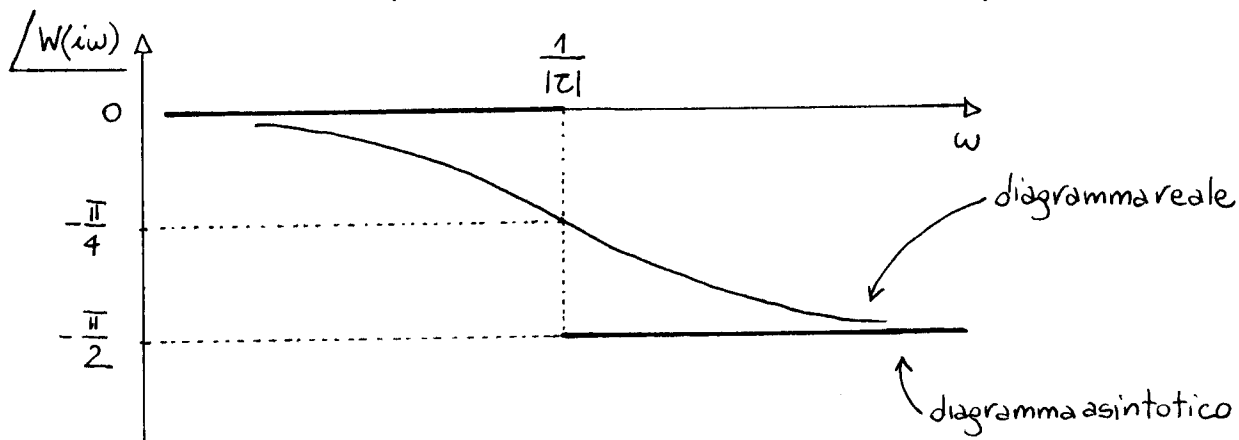


CASO $\tau < 0$

Per $\omega \rightarrow 0$, $\arctan(\omega\tau) \rightarrow 0$

Per $\omega \rightarrow \infty$, $\arctan(\omega\tau) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Inoltre, per $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, $\arctan\left(\frac{1}{|\tau|}\tau\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$



$$4. \quad W(s) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}, \quad \omega_n > 0, \quad -1 < \zeta < 1$$

$$\Rightarrow W(i\omega) = 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} i\omega + \frac{(i\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + i \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega$$

modulo

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\Rightarrow |W(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |W(i\omega)| = 10 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]$$

Studiamo il comportamento asintotico di questa funzione per $\omega \rightarrow 0$ e $\omega \rightarrow \infty$.

- Se $\omega \ll \omega_n$, allora $\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ e $\frac{\omega^4}{\omega_n^4}$ sono trascurabili rispetto a 1; quindi

$$|W(i\omega)|_{dB} \approx 10 \log_{10} 1 = 0 \quad \text{per } \omega \ll \omega_n.$$

- Se $\omega \gg \omega_n$, allora $\frac{\omega^4}{\omega_n^4}$ domina tutti gli altri termini; quindi

$$|W(i\omega)|_{dB} \approx 10 \log_{10} \left(\frac{\omega^4}{\omega_n^4} \right) = 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n \quad \text{per } \omega \gg \omega_n$$



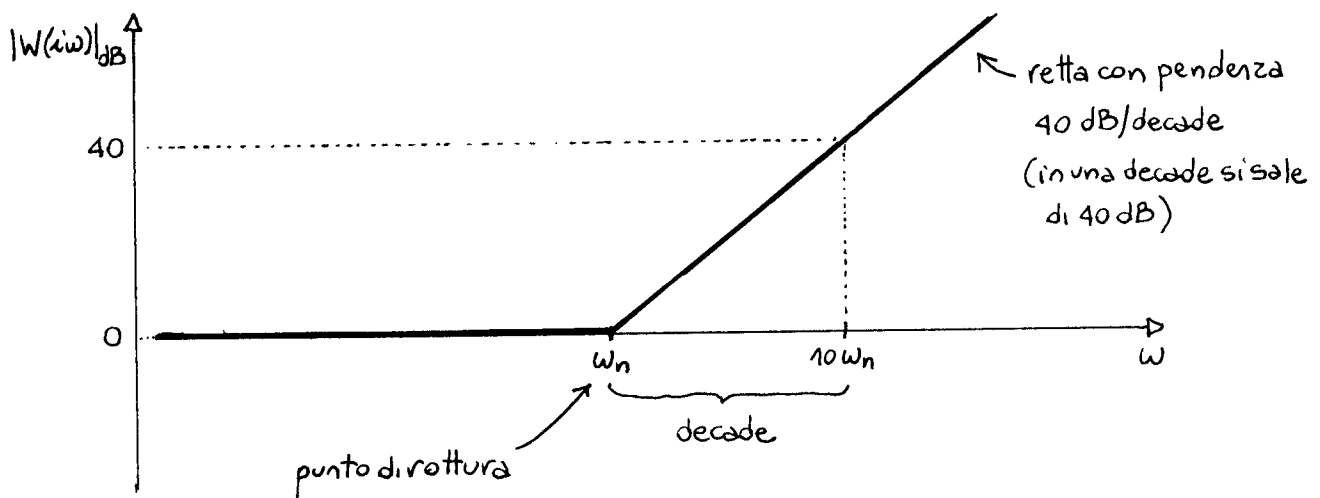
Utilizzando una scala logaritmica sulle ascisse,
questa equazione rappresenta una retta con pendenza 40 dB/decade.
Inoltre, la retta interseca l'asse delle ascisse (0 dB) in $\omega = \omega_n$.

Osserviamo inoltre che:

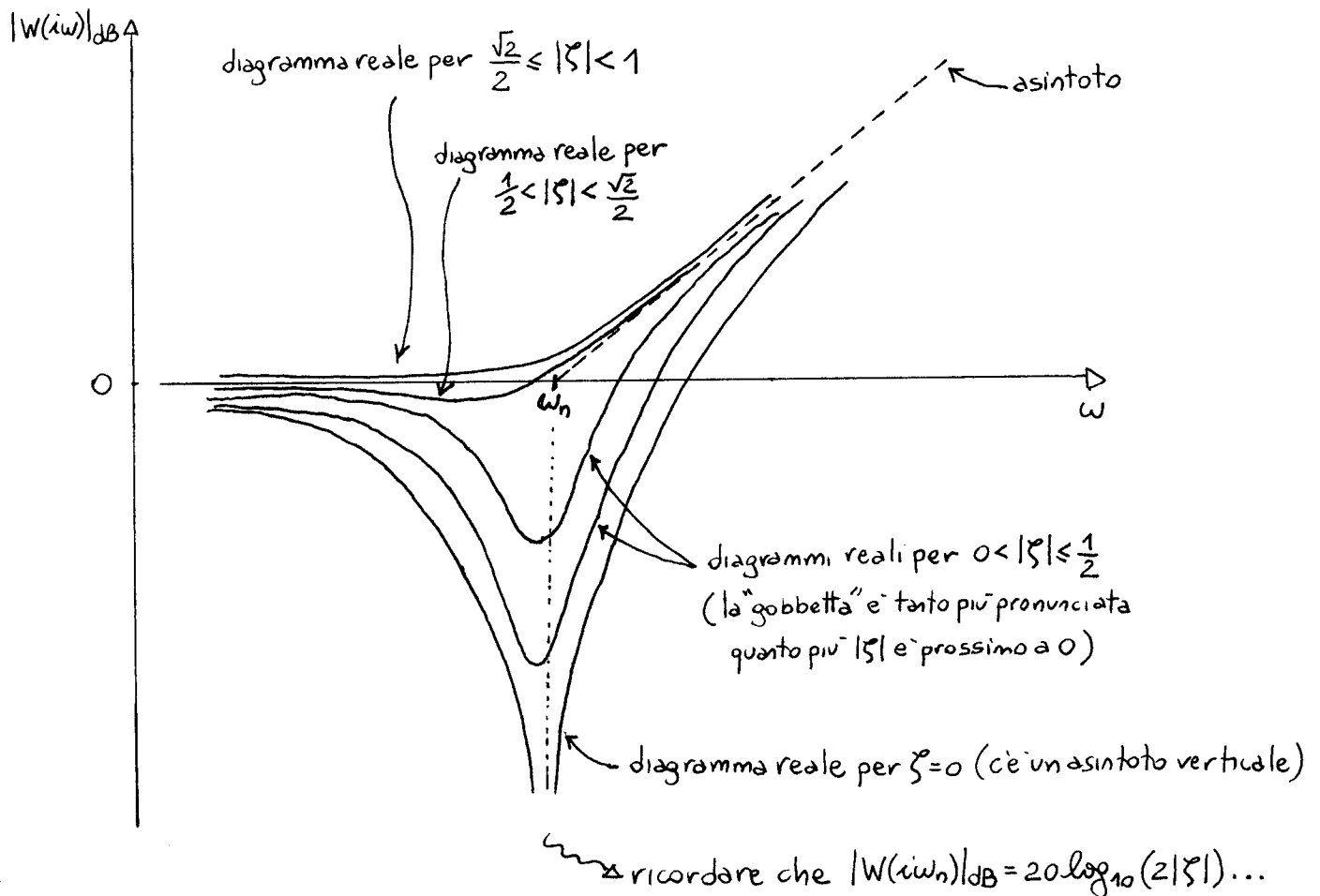
- se $\omega = \omega_n$, $|W(i\omega_n)|_{dB} = 10 \log_{10} (4\zeta^2) = 20 \log_{10} (2|\zeta|)$

Dato che $\zeta \in (-1, 1)$, il valore di $|W(i\omega_n)|_{dB}$ è compreso tra 0
(quando $|\zeta| \rightarrow 1$) e $-\infty$ (quando $\zeta \rightarrow 0$).

Il diagramma di Bode asintotico del modulo approssima il diagramma reale con una linea spezzata formata dai due asintoti. I due asintoti si congiungono nel punto di rottura ω_n .



Il diagramma reale ha diversi andamenti in dipendenza dal valore di $|\zeta|$. (7)



fase

Distinguiamo tre casi:

CASO $0 < \zeta < 1$

Al variare di ω da 0 a ∞ , il numero complesso

$$W(i\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + i 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

si trova sempre nel primo e nel secondo quadrante (infatti, la parte immaginaria è sempre positiva, mentre la parte reale è positiva o negativa a seconda che $\omega < \omega_n$ o $\omega > \omega_n$, rispettivamente). Dunque

$$\angle W(i\omega) = \arccos \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \right)$$

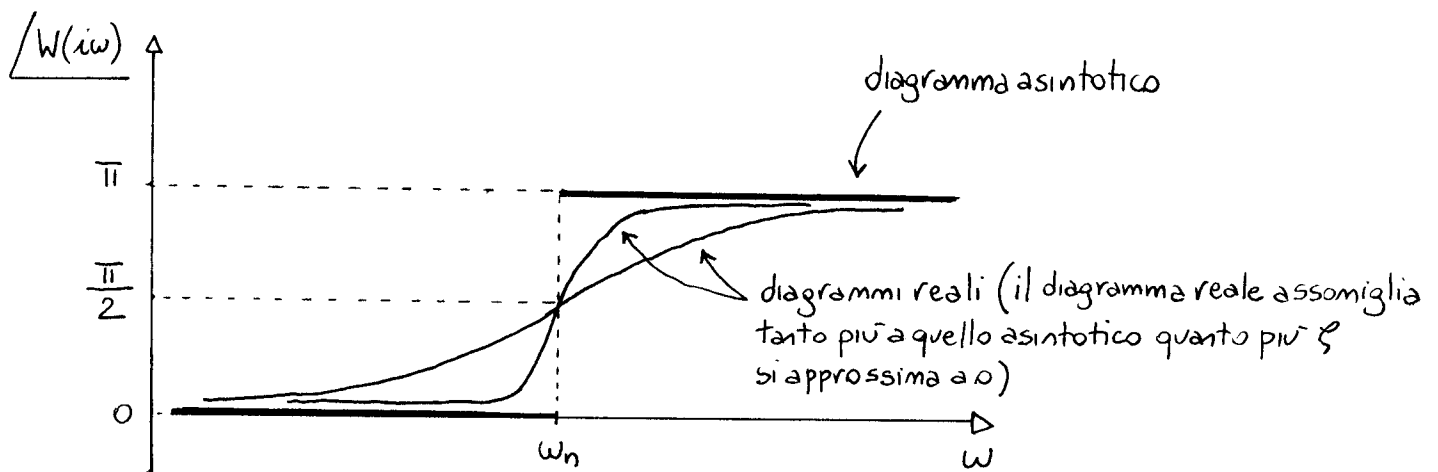
Se $\omega \rightarrow 0$, allora $\angle W(i\omega) \simeq \arccos(1) = 0$

8

Se $\omega \rightarrow \infty$, allora $\angle W(i\omega) \simeq \arccos\left(\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = \arccos(-1) = \pi$

Inoltre, se $\omega = \omega_n$, $\angle W(i\omega_n) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

Il diagramma asintotico della fase approssima il diagramma reale con due tratti costanti formati dai due asintoti. Il "salto" tra i due asintoti avviene in corrispondenza del punto di rottura ω_n .



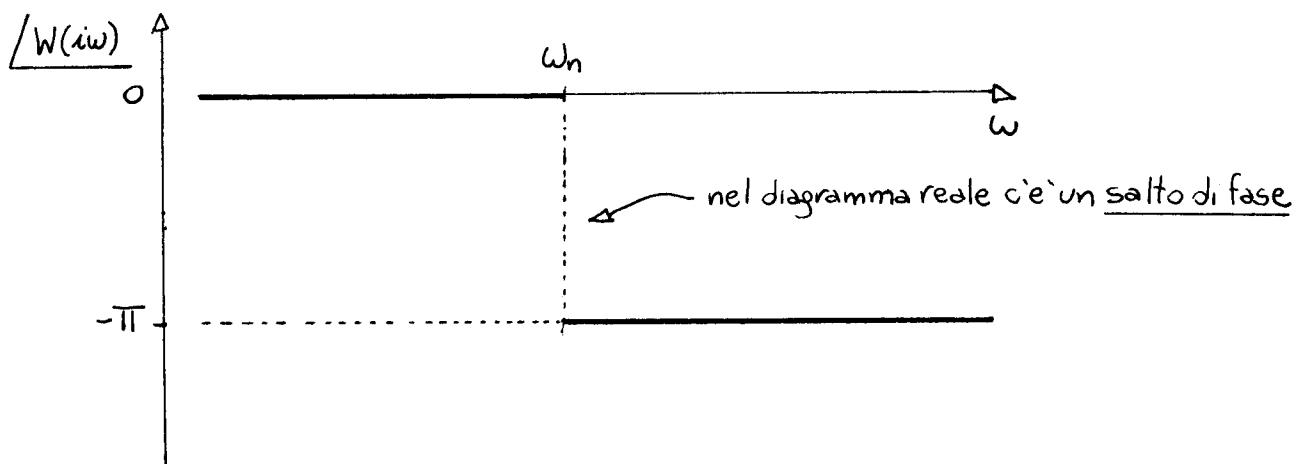
CASO $\zeta = 0$

Se $\zeta = 0$, allora $W(i\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$, cioè $W(i\omega)$ è un numero reale.

Per $\omega < \omega_n$, $W(i\omega)$ è positivo, e quindi $\angle W(i\omega) = 0$.

Per $\omega > \omega_n$, $W(i\omega)$ è negativo, e quindi $\angle W(i\omega) = -\pi$.

Il diagramma reale della fase è dunque il seguente:



Al variare di ω da 0 a ∞ , il numero complesso

$$W(i\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

si trova sempre nel quarto e nel terzo quadrante (infatti, la parte immaginaria è sempre negativa, mentre la parte reale è positiva o negativa a seconda che $\omega < \omega_n$ o $\omega > \omega_n$, rispettivamente). Dunque

$$\angle W(i\omega) = -\arccos\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\right)$$

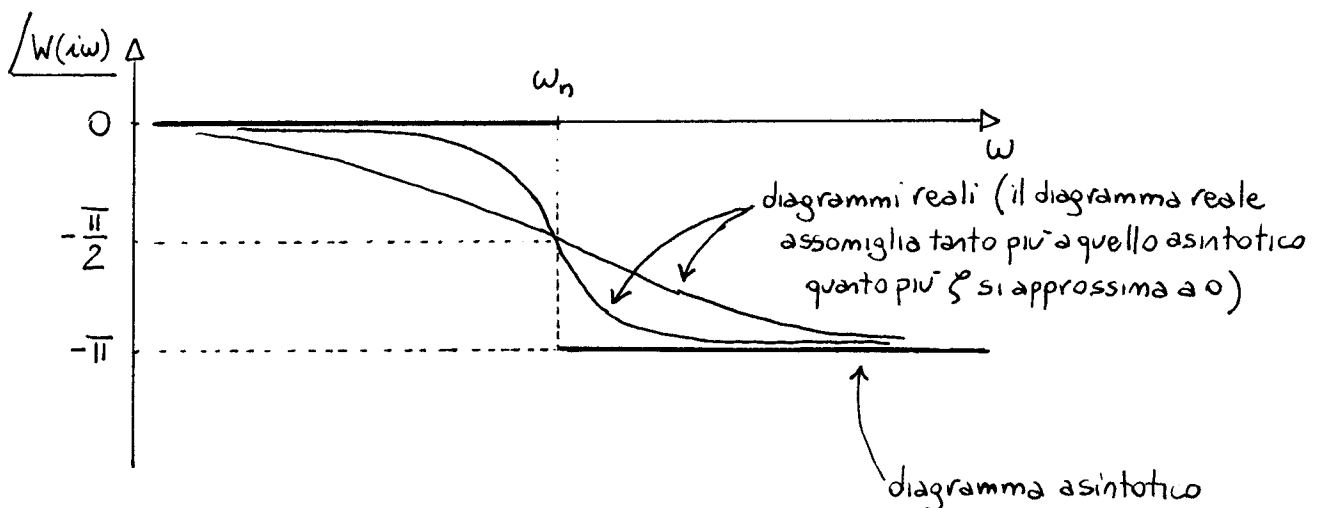
attenzione al segno!

Siamo nel 3° e 4° quadrante...

Se $\omega \rightarrow 0$, allora $\angle W(i\omega) \simeq -\arccos(1) = 0$

Se $\omega \rightarrow \infty$, allora $\angle W(i\omega) \simeq -\arccos\left(\frac{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\arccos(-1) = -\pi$

Inoltre, se $\omega = \omega_n$, $\angle W(i\omega_n) = -\arccos(0) = -\frac{\pi}{2}$.

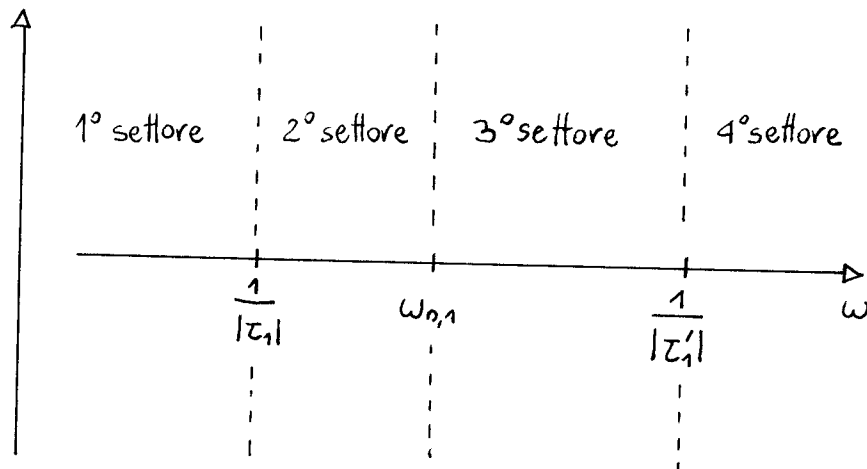


1. Dopo aver portato $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{k_b}{s^h} \frac{(1 + \tau_1' s) \dots \left(1 + \frac{2\zeta_1'}{\omega_{n,1}'} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}'^2}\right) \dots}{(1 + \tau_1 s) \dots \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n,1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}^2}\right) \dots}$$

individuare sui grafici i punti di rottura (cioè, i reciproci dei moduli delle costanti di tempo τ , e le pulsazioni naturali ω_n), dividendo i grafici in settori.

esempio



2. Tracciare i grafici asintotici in ciascun settore, ricordando che:

- nel 1° settore l'unico contributo è dato da $\frac{k_b}{s^h}$
- i fattori del tipo $1 + \tau s$ e $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ (sia a numeratore che a denominatore) contribuiscono solo a destra del corrispondente punto di rottura
- i contributi asintotici di tutti i fattori attivi in un settore si sommano algebricamente.

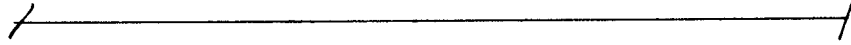
NOTA: Utilizzare la seguente tabella dei contributi asintotici:

**Tabella dei contributi a modulo e fase
nei diagrammi di Bode asintotici**

Termine	Contributo al modulo	Contributo alla fase
$k_b s^h \quad (k_b > 0, h = 0, 1, 2, \dots)$	$+20 h \text{ dB/dec}$	$+h \frac{\pi}{2}$
$\frac{k_b}{s^h} \quad (k_b > 0, h = 1, 2, \dots)$	$-20 h \text{ dB/dec}$	$-h \frac{\pi}{2}$
$k_b s^h \quad (k_b < 0, h = 0, 1, 2, \dots)$	$+20 h \text{ dB/dec}$	$-\pi + h \frac{\pi}{2}$
$\frac{k_b}{s^h} \quad (k_b < 0, h = 1, 2, \dots)$	$-20 h \text{ dB/dec}$	$-\pi - h \frac{\pi}{2}$
$1 + \tau s \quad (\tau > 0)$	$+20 \text{ dB/dec per } \omega > \frac{1}{\tau}$	$+\frac{\pi}{2} \text{ per } \omega > \frac{1}{\tau}$
$\frac{1}{1 + \tau s} \quad (\tau > 0)$	$-20 \text{ dB/dec per } \omega > \frac{1}{\tau}$	$-\frac{\pi}{2} \text{ per } \omega > \frac{1}{\tau}$
$1 + \tau s \quad (\tau < 0)$	$+20 \text{ dB/dec per } \omega > \frac{1}{ \tau }$	$-\frac{\pi}{2} \text{ per } \omega > \frac{1}{ \tau }$
$\frac{1}{1 + \tau s} \quad (\tau < 0)$	$-20 \text{ dB/dec per } \omega > \frac{1}{ \tau }$	$+\frac{\pi}{2} \text{ per } \omega > \frac{1}{ \tau }$
$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad (\omega_n > 0, 0 < \zeta < 1)$	$+40 \text{ dB/dec per } \omega > \omega_n$	$+\pi \text{ per } \omega > \omega_n$
$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (\omega_n > 0, 0 < \zeta < 1)$	$-40 \text{ dB/dec per } \omega > \omega_n$	$-\pi \text{ per } \omega > \omega_n$
$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad (\omega_n > 0, -1 < \zeta \leq 0)$	$+40 \text{ dB/dec per } \omega > \omega_n$	$-\pi \text{ per } \omega > \omega_n$
$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (\omega_n > 0, -1 < \zeta \leq 0)$	$-40 \text{ dB/dec per } \omega > \omega_n$	$+\pi \text{ per } \omega > \omega_n$

3. Correggere il diagramma asintotico

↓ fare particolare attenzione al valore di ζ
($\Rightarrow$ altezza della "gobbetta") nell'intorno
delle pulsazioni naturali ω_n .



L'esempio seguente illustra il procedimento...

ESEMPIO

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s(s^2+s+16)}$$

1° passo

Verifichiamo se s^2+s+16 ha radici reali o complesse coniugate.

$$\Delta = 1 - 64 = -63 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse coniugate}$$

$\Rightarrow s^2+s+16$ NON può essere scomposto nella forma $(s+a)(s+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

2° passo

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode.

$$W(s) = \frac{(-1)10}{16} \frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{16}\right)} = \frac{k_b}{s} \cdot \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

$$\bullet k_b = -\frac{5}{8}$$

$$\bullet \tau_1 = -1$$

$$\bullet \tau_2 = \frac{1}{10}$$

$$\bullet \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

3° passo

I punti di rottura del diagramma sono:

$$\bullet \frac{1}{|\tau_1|} = 1$$

$$\bullet \omega_n = 4$$

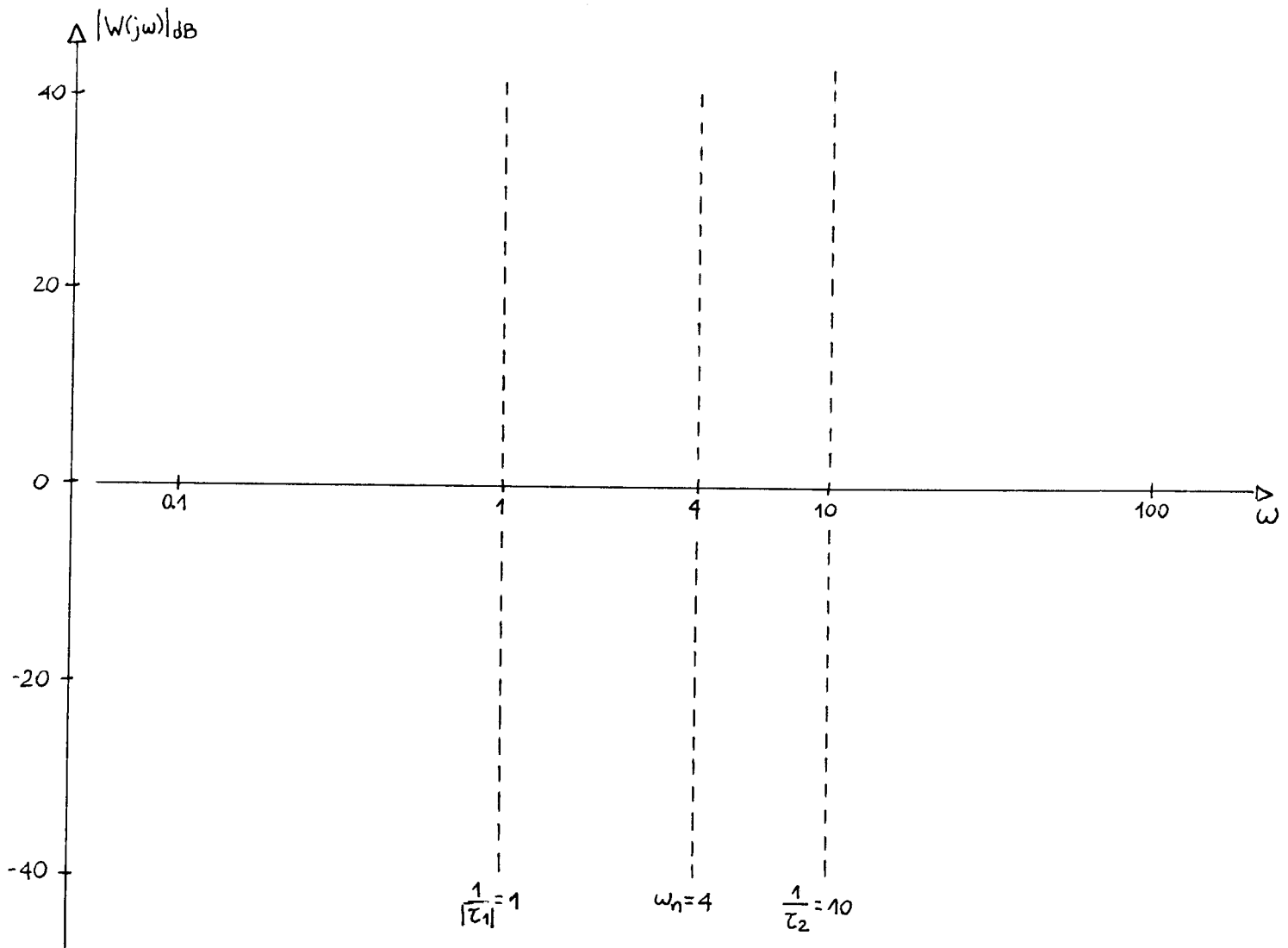
$$\bullet \frac{1}{\tau_2} = 10$$

~> TRACCIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO...

1. Dividiamo il diagramma in settori

14

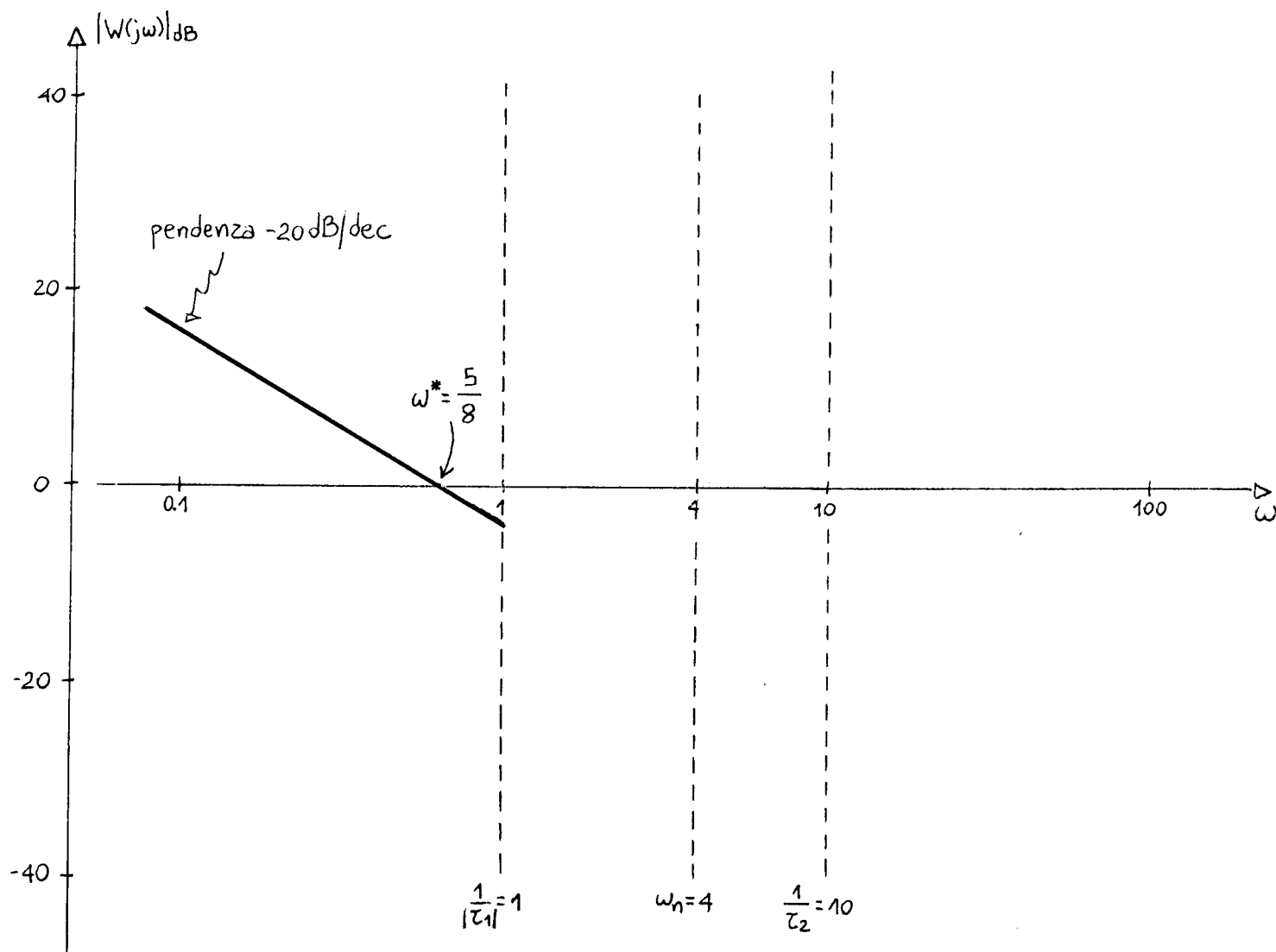
I 3 punti di rottura dividono il diagramma in 4 settori...



La regola è che ciascun termine in cui è stata scomposta la funzione di trasferimento $W(s)$ contribuisce solo a destra del corrispondente punto di rottura, quando si traccia il diagramma asintotico...

2. Se $\omega < \frac{1}{|\tau_1|} = 1$, l'unico contributo è quello di $\frac{k_b}{s}$.

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_1(s) = \frac{k_b}{s}$



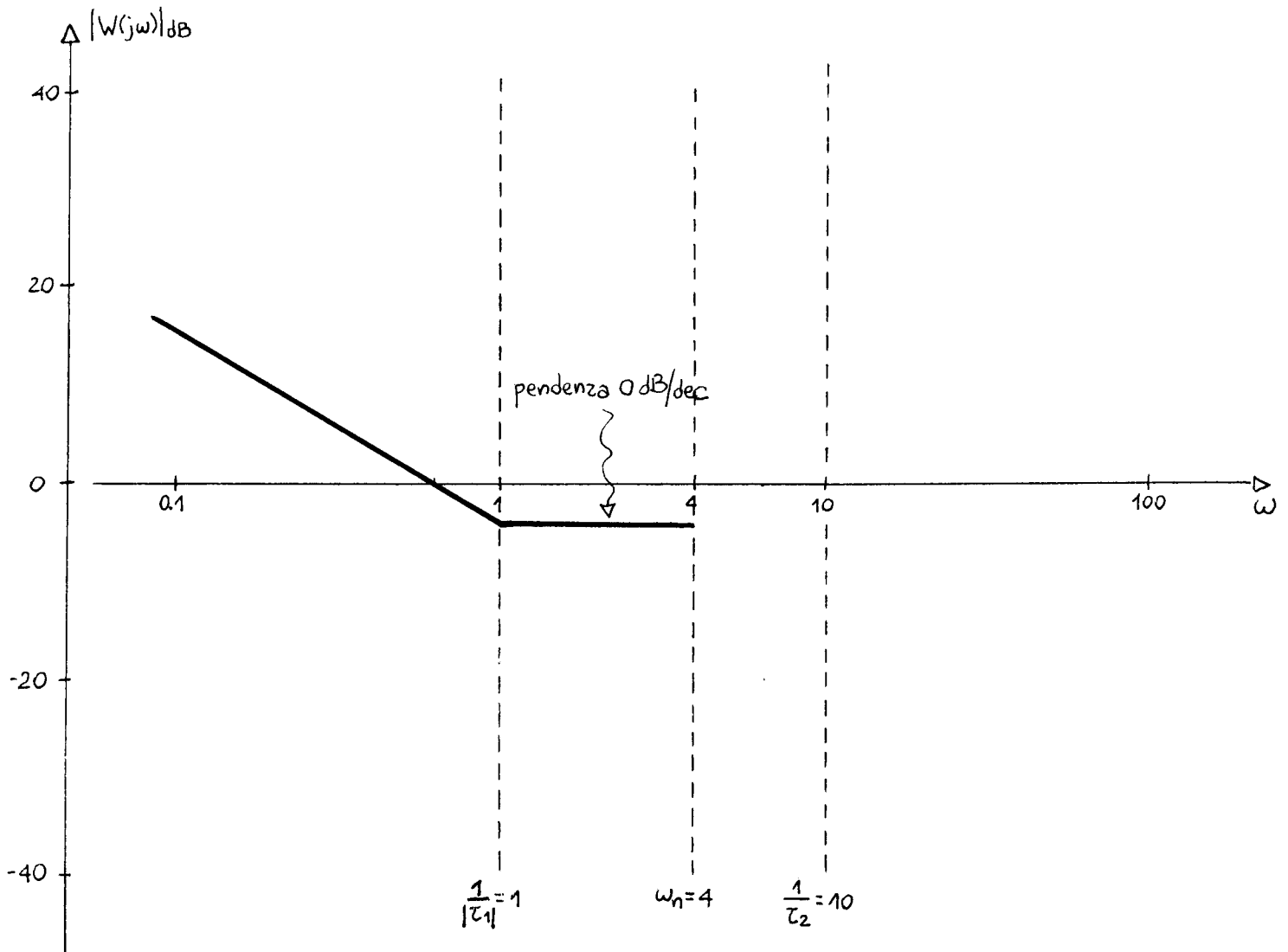
Il contributo al diagramma del termine $\frac{k_b}{s}$ è una retta con pendenza -20 dB/dec , di cui dobbiamo determinare l'intersezione con l'asse delle ascisse.

$$\left| \frac{k_b}{s} \right|_{s=j\omega} = 1 \Rightarrow \frac{|k_b|}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega^* = |k_b| = \frac{5}{8}$$

per poterla posizionare correttamente sul grafico...

3. Se $\frac{1}{|\tau_1|} \leq \omega < \omega_n$ ($1 \leq \omega < 4$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$ e $(1+\tau_1 s)$. (16)

"Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia $W_2(s) = W_1(s) \cdot (1+\tau_1 s)$.



$$W_2(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1+\tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}}$$

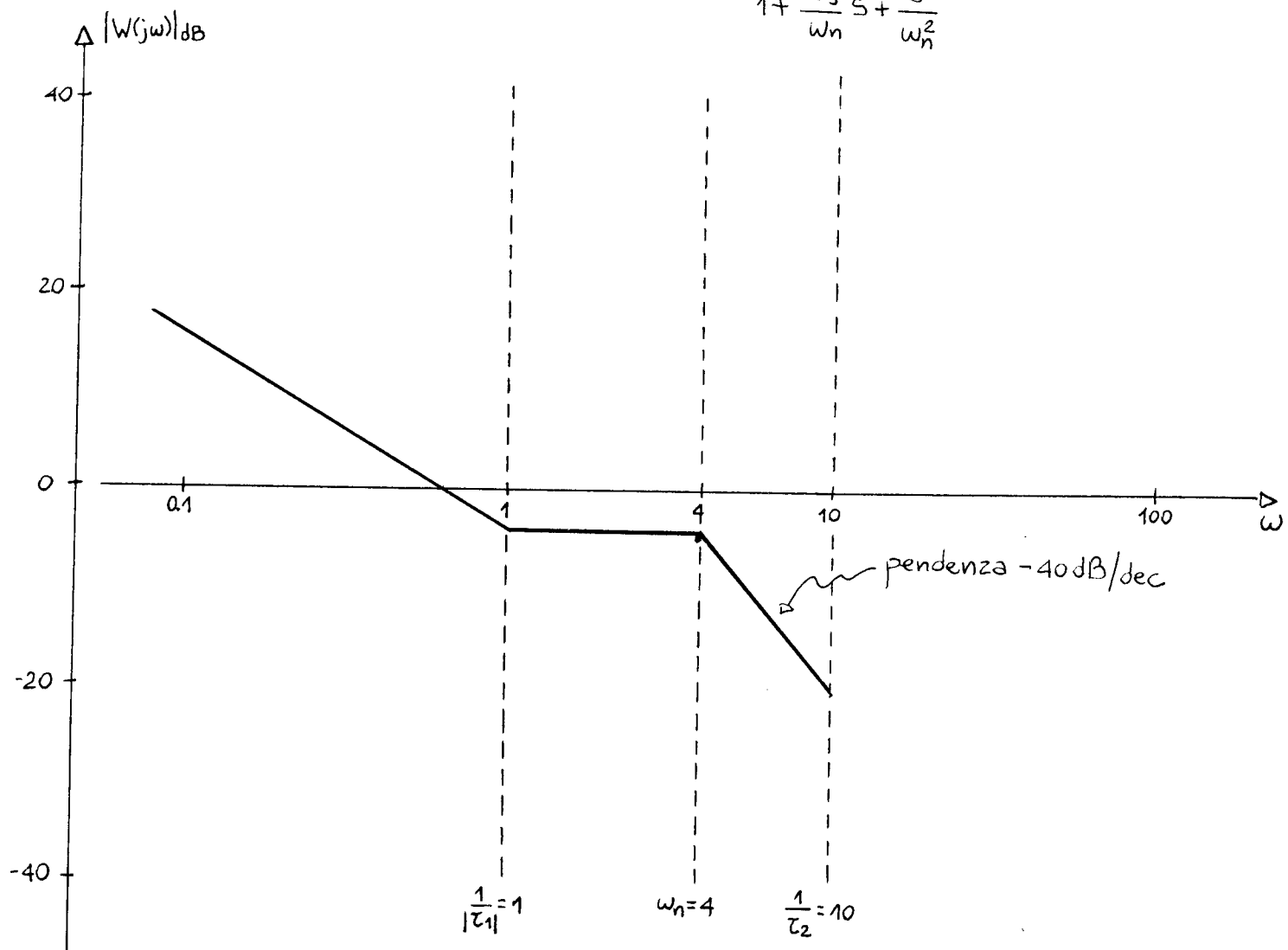
Il contributo complessivo è: $-20 + 20 = 0 \text{ dB/dec}$

4. Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$), i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$, $(1+\tau_1 s)$

(17)

e $\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$, "Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia

$$W_3(s) = W_2(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$



$$W_3(s) = \left(\frac{k_b}{s} \right) \cdot (1 + \tau_1 s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

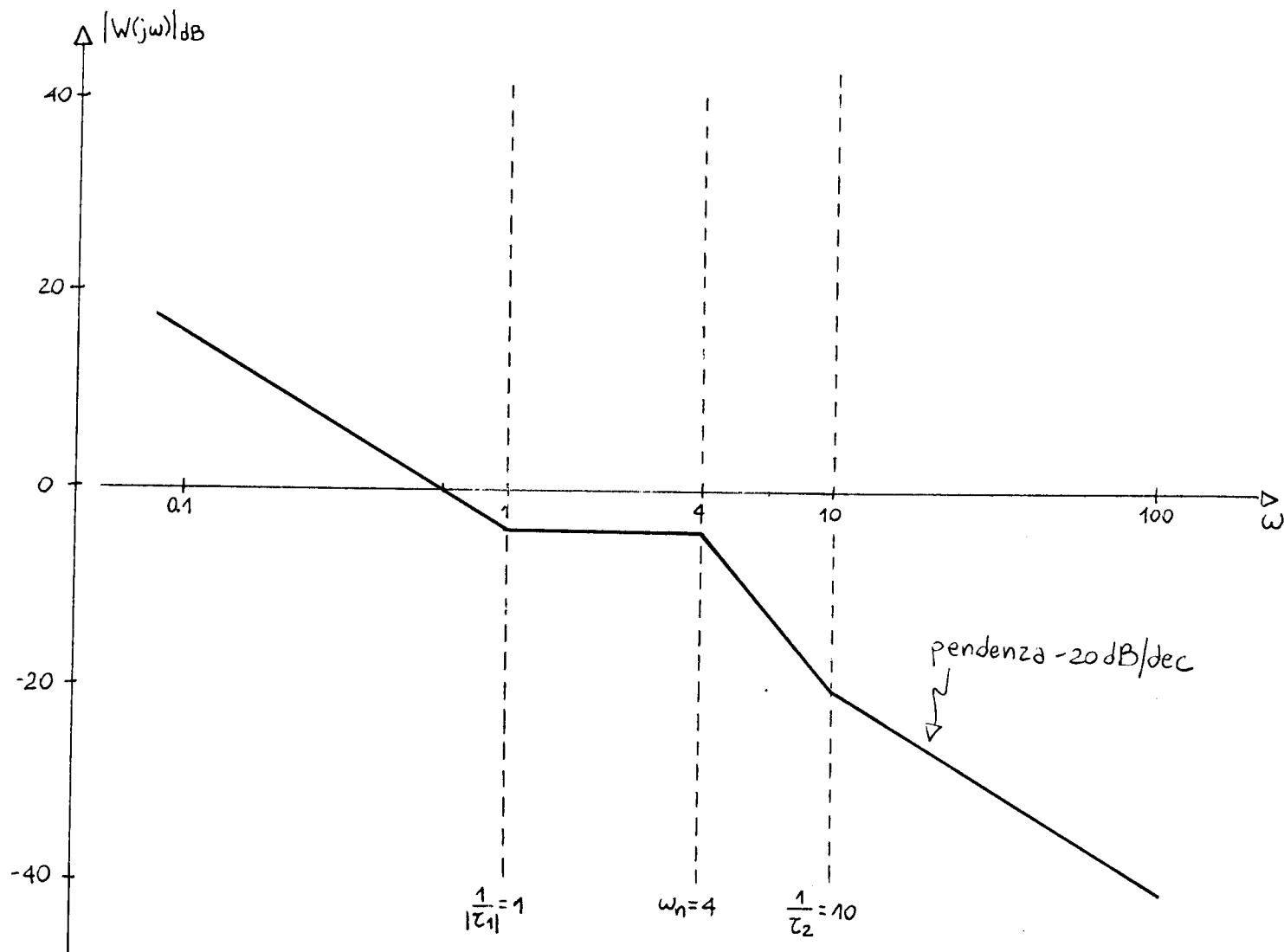
contributo -20 dB/dec contributo +20 dB/dec contributo -40 dB/dec

Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 = -40$ dB/dec.

5. Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$, tutti i termini danno contributo "attivo".

(18)

In questo settore la f.d.t. che consideriamo coincide con tutta $W(s)$.



$$W(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 + \tau_1 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40 \text{ dB/dec}} \cdot \underbrace{(1 + \tau_2 s)}_{\text{contributo } +20 \text{ dB/dec}}$$

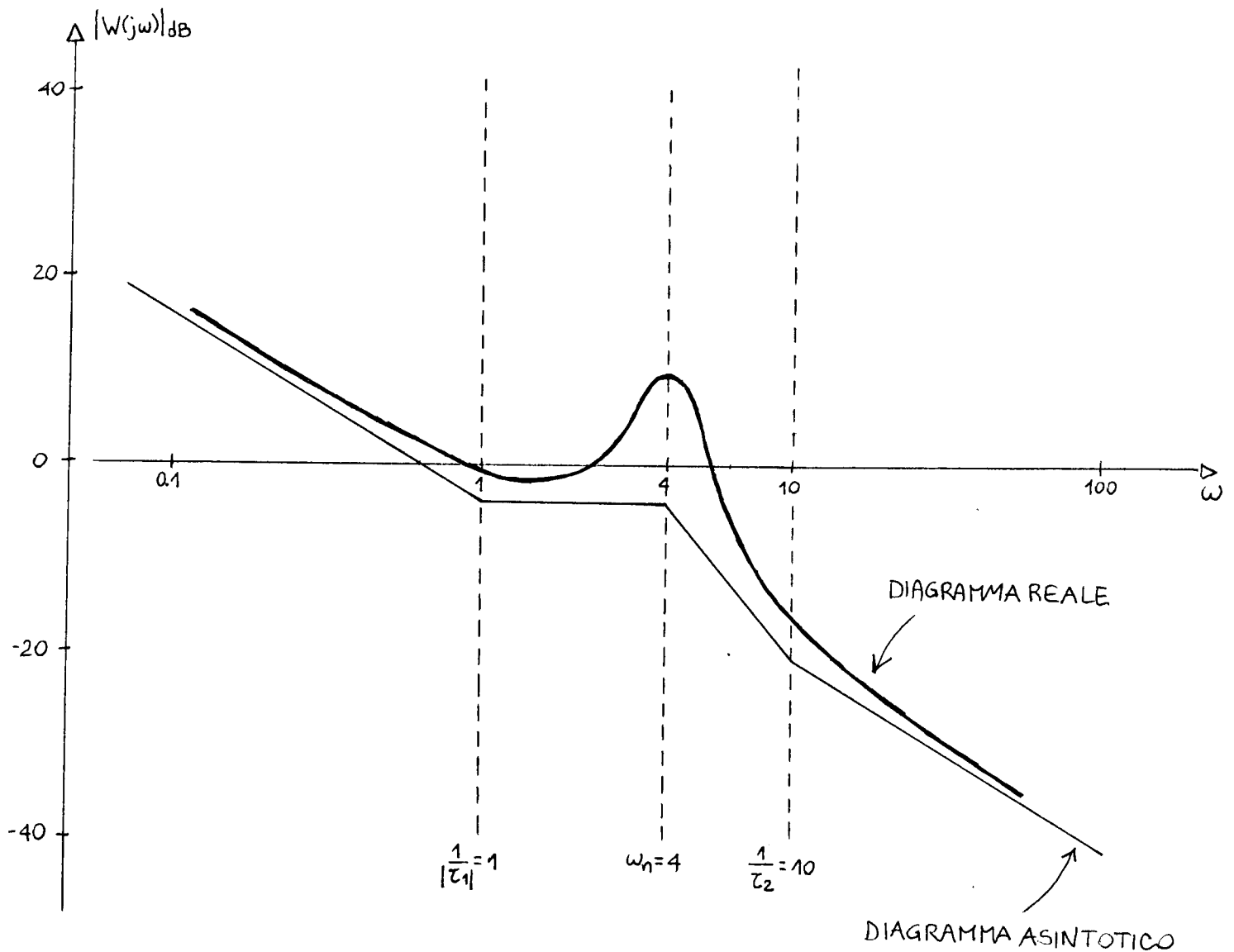
Il contributo complessivo è: $-20 + 20 - 40 + 20 = -20 \text{ dB/dec}$.

Abbiamo tracciato il DIAGRAMMA ASINTOTICO del modulo...

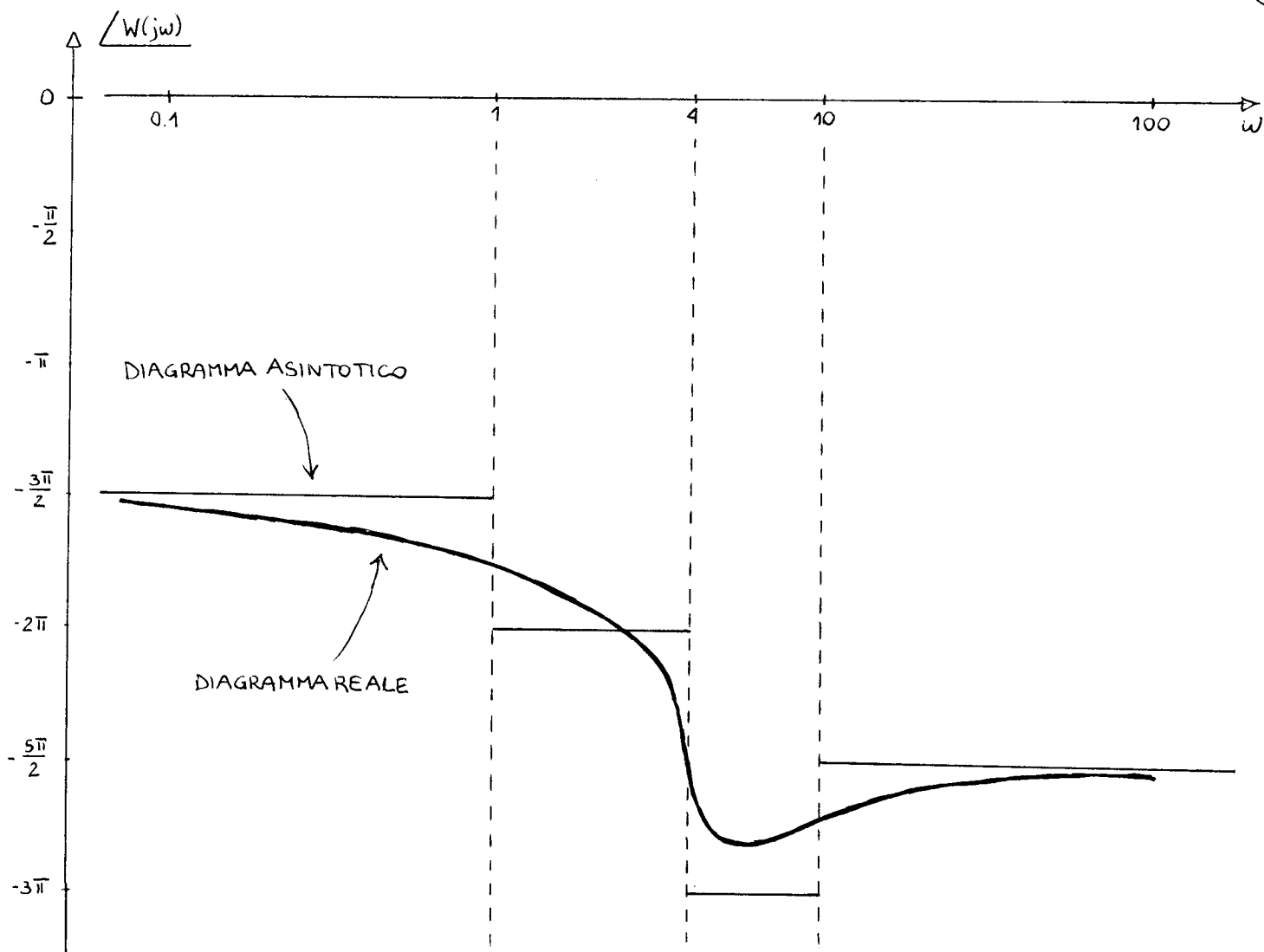
6. Correzione del diagramma

19

ATTENZIONE - In $\omega \approx \omega_n$ dobbiamo considerare la "gobba" dovuta al coefficiente di smorzamento ζ ...



~> TRACCIAMO ORA IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE,
UTILIZZANDO LO STESSO METODO...



- Se $\omega < \frac{1}{|T_1|} = 1$,
 $W_1(s) = \frac{k_b}{s}$
 $k_b < 0 \Rightarrow$ contributo $-\pi$
 $s \Rightarrow$ contributo $-\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

- Se $\frac{1}{|T_1|} \leq \omega < \omega_n$ ($1 \leq \omega < 4$),

$$W_2(s) = \underbrace{W_1(s)}_{\text{contributo } -\frac{3\pi}{2}} \underbrace{((1+T_1s))}_{\text{zero instabile} \Rightarrow \text{contributo } -\frac{\pi}{2}}$$

Il contributo complessivo e^- : $-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$

- Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ ($4 \leq \omega < 10$),

$$W_3(s) = W_2(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

contributo -2π

coppia di poli complessi coniugati stabili $\Rightarrow$ contributo $-\pi$

Il contributo complessivo e^- : $-2\pi - \pi = -3\pi$

- Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$,

$$W(s) = W_3(s) \cdot (1 + \tau_2 s)$$

contributo -3π

zero stabile $\Rightarrow$ contributo $+\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo e^- : $-3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$.