Tracciamento dei Diagrammi di Bode

Consideriamo un polinomio a coefficienti reali

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 + a_0, \quad a_0 \neq 0.$$

Siano:

- $p_i \in \mathbb{R}$ radici reali del polinomio, $i = 1, \dots, r$;
- $z_j, z_j^* \in \mathbb{C}$ radici complesse del polinomio, $j = 1, \dots, c$.

Ovviamente $n = r + 2c$.

Possiamo scrivere il polinomio $p(s)$ in forma fattorizzata:

$$p(s) = \prod_{i=1}^{r}(s - p_i) \prod_{j=1}^{c}(s - z_j)(s - z_j^*)$$

- i termini $s - p_i$ vengono riscritti nella forma

$$s - p_i = s + \frac{1}{\tau_i} \quad \text{avendo posto} \quad \tau_i = -\frac{1}{p_i}$$

- i termini $(s - z_j)(s - z_j^*)$ vengono riscritti nella forma

$$\begin{aligned}(s - z_j)(s - z_j^*) &= s^2 - z_j^* s - z_j s + z_j z_j^* \\ &= s^2 - (z_j + z_j^*)s + z_j z_j^* \\ &= s^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_j)\,s + |z_j|^2 \\ &= s^2 + 2\zeta_j \omega_{n,j} s + \omega_{n,j}^2\end{aligned}$$

avendo posto:

- $\omega_{n,j} = |z_j| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{n,j} > 0}$
- $2\zeta_j \omega_{n,j} = -2\,\mathrm{Re}(z_j) \quad \Rightarrow \quad \zeta_j = -\dfrac{\mathrm{Re}(z_j)}{\omega_{n,j}} = -\dfrac{\mathrm{Re}(z_j)}{|z_j|}$

$$\Rightarrow \boxed{-1 < \zeta_j < 1}$$

$$\Rightarrow \quad p(s) = \prod_{i=1}^{r} \left(s + \frac{1}{\tau_i}\right) \prod_{j=1}^{c} \left(s^2 + 2\zeta_j \omega_{n,j} s + \omega_{n,j}^2\right)$$

- τ_i si chiamano <u>COSTANTI DI TEMPO</u>
- $\omega_{n,j}$ " <u>PULSAZIONI NATURALI</u>
- ζ_j " <u>COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO</u>

<u>Esempio</u> - $p(s) = s^3 + 3s^2 + 6s + 8$

$p(-2) = -8 + 3\cdot 4 + 6\cdot(-2) + 8 = 0$

$\Rightarrow$ $s = -2$ è radice del polinomio

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 6 & 8 \\ -2 & & -2 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p(s) = (s+2)(s^2 + s + 4)$$

$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$

$\Rightarrow$ il fattore di secondo grado ha <u>radici complesse</u>

$$\Rightarrow \quad p(s) = \left(s + \frac{1}{\tau}\right)\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)$$

dove, per l'uguaglianza dei polinomi:

- $\tau = \dfrac{1}{2}$

- $\omega_n^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 2$

- $2\zeta\omega_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \dfrac{1}{2\omega_n} = \dfrac{1}{4}$

<u>NOTA</u> - $|\zeta| < 1$

Consideriamo una generica funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{k\left(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right)}{s^h\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right)} \qquad \begin{array}{l} b_0 \neq 0 \\ a_0 \neq 0 \end{array}$$

Se $h = 1, 2, \ldots$, abbiamo h <u>poli</u> nell'origine; se $h = -1, -2, \ldots$, abbiamo h <u>zeri</u> nell'origine; se $h = 0$, non abbiamo né zeri né poli nell'origine.

Fattorizziamo numeratore e denominatore nel modo che abbiamo visto sopra:

$$W(s) = \frac{k\left(s + \frac{1}{\tau_1'}\right) \ldots \left(s^2 + 2\zeta_1'\omega_{n,1}' s + \omega_{n,1}'^2\right) \ldots}{s^h\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \ldots \left(s^2 + 2\zeta_1\omega_{n,1} s + \omega_{n,1}^2\right) \ldots}$$

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

i termini noti di tutti i binomi e trinomi devono essere resi uguali a 1

$$W(s) = \frac{k \cdot \frac{1}{\tau_1'} \cdot \ldots \cdot \omega_{n,1}' \cdot \ldots}{\frac{1}{\tau_1} \ldots \omega_{n,1}^2 \ldots} \frac{(1+\tau_1' s) \ldots \left(1 + \frac{2\zeta_1'}{\omega_{n,1}'} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}'^2}\right) \ldots}{s^h (1+\tau_1 s) \ldots \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n,1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}^2}\right) \ldots}$$

k_b (guadagno di Bode)

$$W(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s^h} \cdot \frac{(1+\tau_1' s) \ldots \left(1 + \frac{2\zeta_1'}{\omega_{n,1}'} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}'^2}\right) \ldots}{(1+\tau_1 s) \ldots \left(1 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n,1}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,1}^2}\right) \ldots}}$$

Questa è la forma di Bode di $W(s)$

Esempio - $W(s) = \dfrac{s^2 - s - 2}{s(s^2 + s + 4)}$

- consideriamo il polinomio a numeratore: $s^2 - s - 2$

Dato che $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, il polinomio ha due radici reali, e lo possiamo fattorizzare:

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$$

- Consideriamo il polinomio a denominatore : $s^2 + s + 4$

Dato che $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, il polinomio ha radici complesse, e non lo fattorizziamo ulteriormente.

$$\Rightarrow \quad W(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{s(s^2+s+4)}$$

<u>Forma di Bode:</u>

$$W(s) = \frac{-2}{4} \frac{(1+s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(1+s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{s\left(1+\frac{s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)}$$

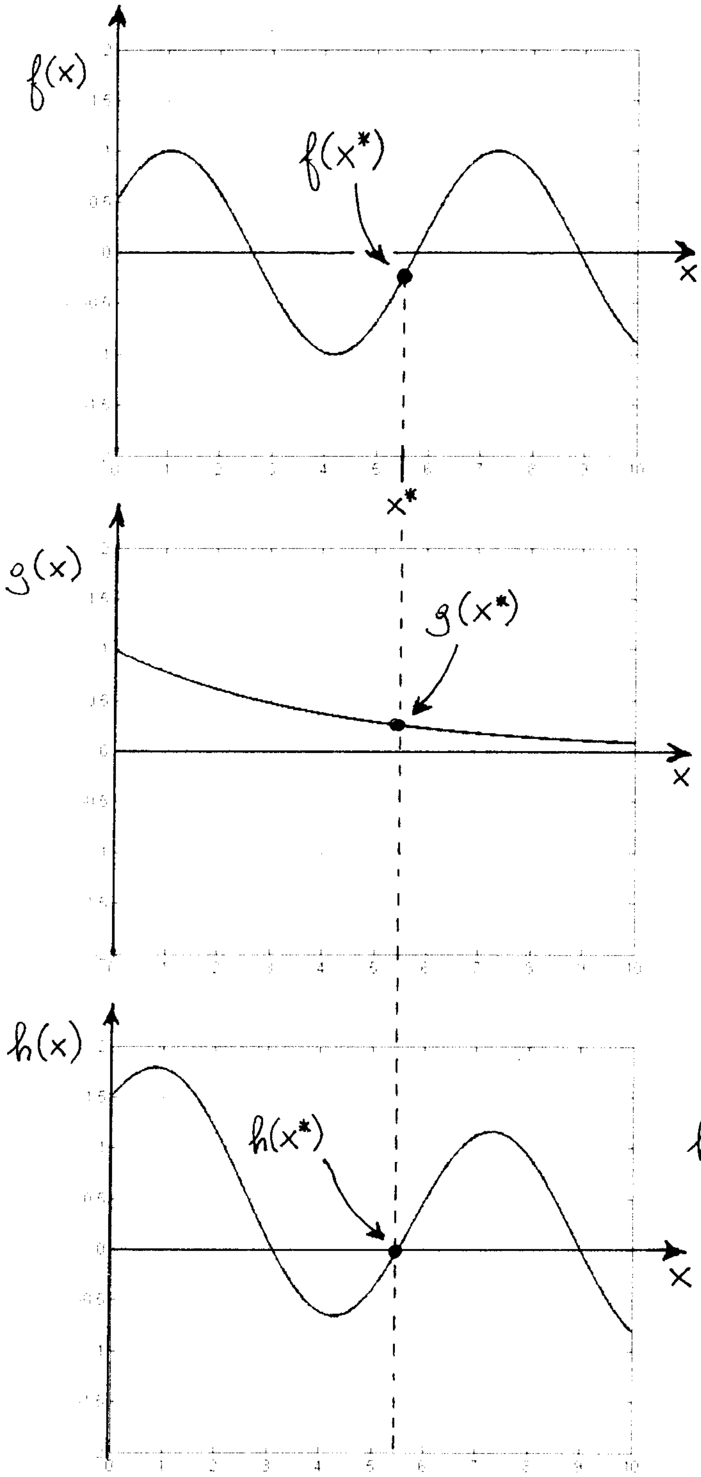
$$= \frac{k_b}{s} \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

avendo posto:

- $k_b = -\frac{1}{2}$
- $\tau_1 = 1$
- $\tau_2 = -\frac{1}{2}$
- $\omega_n^2 = 4 \Rightarrow \omega_n = 2$
- $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{8} = \frac{1}{4}$

NOTA

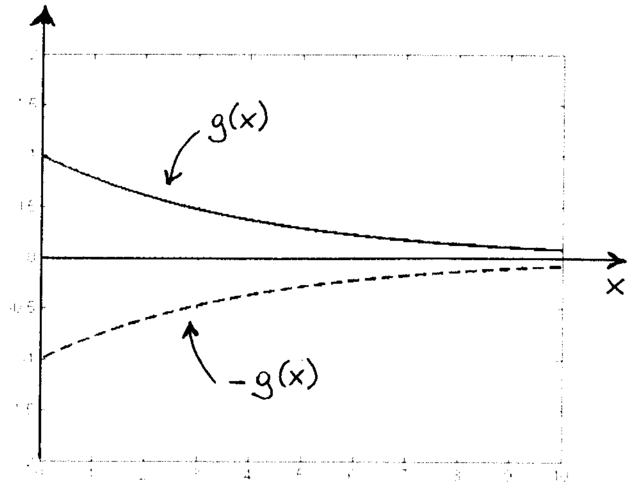
- Tracciare il grafico di $h(x) = f(x) + g(x)$ avendo già tracciato il grafico di $f(x)$ e $g(x)$



$h(x^*) = f(x^*) + g(x^*)$

$\Rightarrow$ Il grafico di $h(x)$ può essere <u>tracciato per punti</u> a partire dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ ....

- Il grafico di $-g(x)$ si ottiene ribaltando il grafico di $g(x)$ rispetto all'asse delle ascisse.



Si osservi che $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + \left(-g(x)\right)$, quindi ricadiamo nel caso precedente per il tracciamento del grafico di $h(x)$.

- Se $f(x) = mx + q$ e $g(x) = m'x + q'$, risulta

$$h(x) = f(x) + g(x) = mx + q + m'x + q' = (m + m')x + (q + q')$$

Dunque, sommando due rette, si ottiene ancora una retta con, in particolare, <u>coefficiente angolare</u> dato dalla <u>somma</u> dei coefficienti angolari delle due rette.

⇝ Queste regole risulteranno utili per il tracciamento dei <u>diagrammi di Bode</u> ...

I diagrammi di Bode di una funzione di trasferimento $W(s)$ sono i grafici del modulo e della fase della funzione di risposta armonica $W(i\omega)$, quindi i grafici di $|W(i\omega)|$ e $\angle W(i\omega)$ in funzione di ω.

Consideriamo il seguente caso particolare per $W(s)$:

$$W(s) = \frac{k_b}{s} \frac{1+\tau s}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Dunque:

$$W(i\omega) = \frac{k_b}{i\omega} \frac{1+\tau\cdot(i\omega)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}\cdot i\omega+\frac{(i\omega)^2}{\omega_n^2}} = \frac{k_b}{i\omega} \frac{1+i\cdot\tau\omega}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i\cdot 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

Calcoliamo il modulo di $W(i\omega)$:

$$|W(i\omega)| = \left|\frac{k_b}{i\omega}\right| \frac{|1+i\cdot\tau\omega|}{\left|\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i\cdot 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right|}$$

Ricordando che, nei diagrammi di Bode, il modulo viene espresso in decibel (dB), abbiamo:

$$|W(i\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|W(i\omega)| = 20\log_{10}\left(\left|\frac{k_b}{i\omega}\right| \frac{|1+i\cdot\tau\omega|}{\left|\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i\cdot 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right|}\right)$$

$$= 20\log_{10}\left|\frac{k_b}{i\omega}\right| + 20\log_{10}|1+i\tau\omega|$$

proprietà del logaritmo

$$- 20\log_{10}\left|\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{k_b}{i\omega}\right|_{dB} + |1+i\tau\omega|_{dB} - \left|\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right|_{dB}$$

Questo esempio ci suggerisce che, se sappiamo tracciare il diagramma di Bode del modulo di termini elementari del tipo $\frac{k_b}{s^h}$, $1+\tau s$ e $1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}$, il diagramma di Bode del modulo di funzioni razionali più complesse si ottiene per somma algebrica dei contributi dei termini elementari componenti.

Calcoliamo ora la fase di $W(i\omega)$:

$$\underbrace{\angle W(i\omega) =}_{\text{proprietà dei numeri complessi}} \angle \frac{k_b}{i\omega} + \angle 1+i\tau\omega - \angle \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+i2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$$

Questo esempio ci suggerisce che, se sappiamo tracciare il diagramma di Bode della fase di termini elementari del tipo $\frac{k_b}{s^h}$, $1+\tau s$ e $1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}$, il diagramma di Bode della fase di funzioni razionali più complesse si ottiene per somma algebrica dei contributi dei termini elementari componenti.

RIFERIMENTO PER I DIAGRAMMI DI BODE:

G. Marro, "CONTROLLI AUTOMATICI"

Ed. ZANICHELLI

Capitolo 3, pagg. 126 ÷ 142