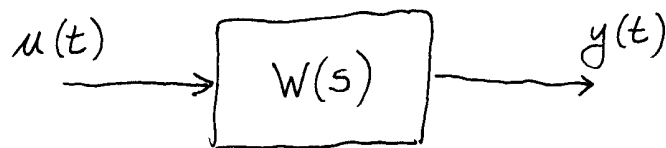


1. RISPOSTA PERMANENTE A SEGNALI SINUSOIDALI

Consideriamo un sistema lineare stazionario a tempo continuo e ILUL stabile, descritto dalla funzione di trasferimento $W(s)$.

NOTA - Dato che il sistema è ILUL stabile, i poli di $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa.



Vogliamo calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

$\downarrow$ ampiezza $\searrow$ pulsazione

La trasformata di Laplace di $u(t)$ è:

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La trasformata di Laplace di $y(t)$ è:

$$Y(s) = W(s)U(s) = A\omega \frac{W(s)}{s^2 + \omega^2} = A\omega \frac{W(s)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

Scomponiamo $Y(s)$ in fratti semplici:

$$Y(s) = Y_T(s) + A\omega \left\{ \frac{\alpha(\omega)}{s - j\omega} + \frac{\alpha^*(\omega)}{s + j\omega} \right\}$$

$\searrow$ fratti semplici corrispondenti ai poli di $W(s)$

dove $\alpha(\omega)$ è il residuo di $\frac{W(s)}{s^2 + \omega^2}$ in $s = j\omega$:

(2)

$$\alpha(\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \frac{W(s)}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \rightarrow j\omega} \frac{W(s)}{s + j\omega} = \frac{W(j\omega)}{2j\omega}$$

Dato che $W(j\omega) \in \mathbb{C}$, possiamo darne una rappresentazione in modulo e fase:

$$W(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

dove:

- $M(\omega) = |W(j\omega)|$ - modulo -
- $\varphi(\omega) = \angle W(j\omega)$ - fase - NOTA: $\varphi(\omega) \in (-\pi, \pi]$

Quindi:

$$\bullet \alpha(\omega) = \frac{M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{2j\omega}$$

$$\bullet \alpha^*(\omega) = \frac{M(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}}{-2j\omega} \quad [\text{complesso coniugato di } \alpha(\omega)]$$

$$Y(s) = Y_T(s) + A\omega \left\{ \frac{1}{2j\omega} \frac{M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{s - j\omega} - \frac{1}{2j\omega} \frac{M(\omega) e^{-j\varphi(\omega)}}{s + j\omega} \right\} =$$

$$= Y_T(s) + \frac{AM(\omega)}{2j} \left\{ \frac{e^{j\varphi(\omega)}}{s - j\omega} - \frac{e^{-j\varphi(\omega)}}{s + j\omega} \right\} =$$

$$= Y_T(s) + \frac{AM(\omega)}{2j} \frac{e^{j\varphi(\omega)} s + j\omega e^{j\varphi(\omega)} - e^{-j\varphi(\omega)} s + j\omega e^{-j\varphi(\omega)}}{s^2 + \omega^2} =$$

$$= Y_T(s) + \frac{AM(\omega)}{2j} \frac{[e^{j\varphi(\omega)} - e^{-j\varphi(\omega)}]s + j\omega[e^{j\varphi(\omega)} + e^{-j\varphi(\omega)}]}{s^2 + \omega^2} =$$

$$= Y_T(s) + \frac{AM(\omega)}{2j} \frac{2j \sin(\varphi(\omega))s + j\omega 2 \cos(\varphi(\omega))}{s^2 + \omega^2} =$$

(3)

In questo passaggio, abbiamo applicato:

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = \cancel{\cos\varphi} + j\sin\varphi - \cancel{\cos\varphi} + j\sin\varphi = 2j \sin\varphi$$

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = \cancel{\cos\varphi} + j\cancel{\sin\varphi} + \cancel{\cos\varphi} - j\cancel{\sin\varphi} = 2 \cos\varphi$$

$$= Y_T(s) + AM(\omega) \left\{ \frac{\sin(\varphi(\omega)) \cdot s + \omega \cdot \cos(\varphi(\omega))}{s^2 + \omega^2} \right\} =$$

$$= Y_T(s) + AM(\omega) \left\{ \sin(\varphi(\omega)) \cdot \underbrace{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}_{\text{trasformata di } \cos(\omega t)} + \cos(\varphi(\omega)) \cdot \underbrace{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}_{\text{trasformata di } \sin(\omega t)} \right\}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y_T(t) + AM(\omega) \left[\sin(\varphi(\omega)) \cdot \cos(\omega t) + \cos(\varphi(\omega)) \cdot \sin(\omega t) \right] =$$

$$= \underbrace{y_T(t)}_{\mathcal{L}^{-1}[Y_T(s)]} + AM(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y_T(s)]$$

$\Rightarrow y_T(t)$ è l'antitrasformata dei fratti semplici corrispondenti ai poli di $W(s)$. Dato che i poli di $W(s)$ sono tutti a parte reale negativa, i termini in $y_T(t)$ sono dominati

da esponenziali negativi, il cui limite per $t \rightarrow \infty$ è e^{-0} .

4

Dunque:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0}$$

$\Rightarrow$ La parte di risposta forzata indicata con $y_T(t)$ si chiama RISPOSTA TRANSITORIA, $\rightarrow$ infatti, si esaurisce per $t \rightarrow \infty$.

Invece la parte di risposta forzata:

$$y_p(t) \triangleq A M(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

non ammette limite per $t \rightarrow \infty$, ma rimane limitata per ogni t .

Questa parte di risposta forzata si chiama

RISPOSTA (A REGIME) PERMANENTE $\rightarrow$ non si esaurisce per $t \rightarrow \infty$

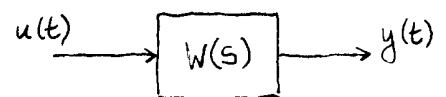
Abbiamo dimostrato il seguente importante teorema:

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo continuo e ILVL stabile, descritto dalla funzione di trasferimento $W(s)$.

Allora la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = A \sin(\omega t + \theta)$

si può scomporre come:



$\downarrow$ sfasamento

$$y(t) = y_T(t) + y_p(t)$$

dove:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0$ (risposta transitoria)

$$y_p(t) = A M(\omega) \sin(\omega t + \theta + \varphi(\omega)) \quad (\text{risposta permanente})$$

dove: $M(\omega) = |W(j\omega)|$

$$\varphi(\omega) = \angle W(j\omega)$$

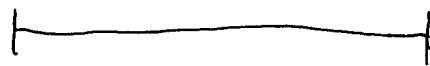
5

NOTA - $M(\omega)$ è la modulazione di ampiezza introdotta dal sistema:

$$M(\omega) < 1 \Rightarrow \text{attenuazione}$$

$$M(\omega) > 1 \Rightarrow \text{amplificazione}$$

$\varphi(\omega)$ è lo sfasamento introdotto dal sistema.



DEFINIZIONE - Dato un sistema lineare stazionario a tempo continuo (non necessariamente ILUL stabile), descritto dalla funzione di trasferimento $W(s)$, la funzione a valori complessi

$$F(\omega) \triangleq W(j\omega)$$

si dice (FUNZIONE DI) RISPOSTA ARMONICA del sistema.



2. RISPOSTA PERMANENTE A UN INGRESSO A GRADINO

Per un sistema lineare stazionario a tempo continuo e ILUL stabile, la risposta a regime permanente del sistema corrispondente all'ingresso gradino unitario $u(t) = 1(t)$, si può calcolare

utilizzando il TEOREMA DEL VALOR FINALE:

6

$$u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = W(s)U(s) = \frac{W(s)}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{W(s)}{\cancel{s}} = W(0)$$

risposta
forzata

guadagno in continua
del sistema

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA RISPOSTA ARMONICA

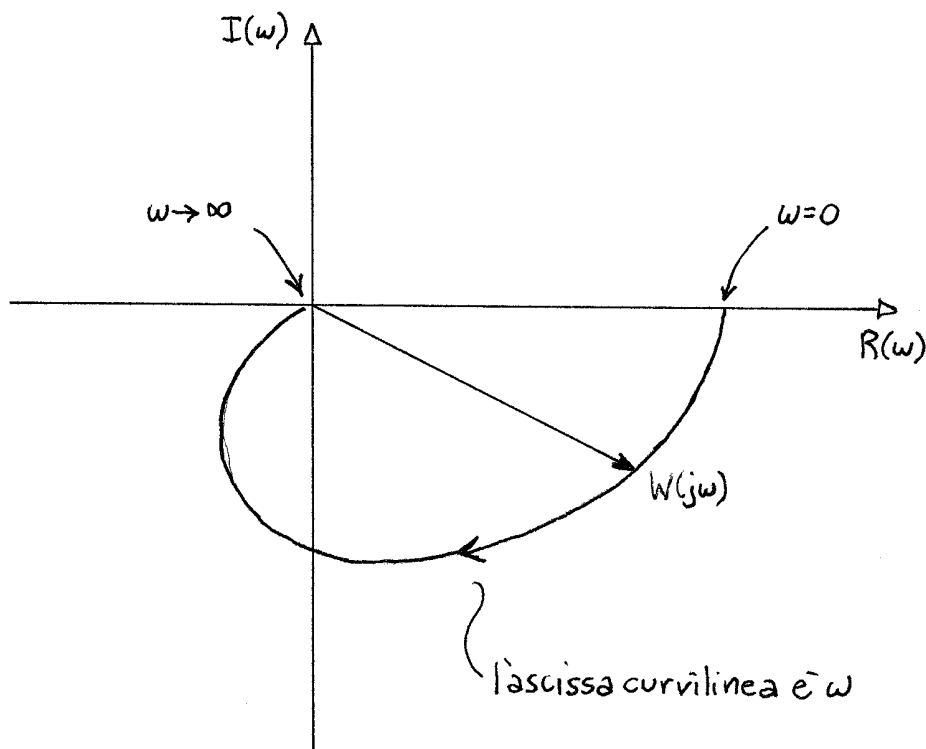
1. diagramma polare (o di Nyquist)

È una rappresentazione della funzione di risposta armonica come una CURVA sul piano complesso.

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

parte reale

parte immaginaria



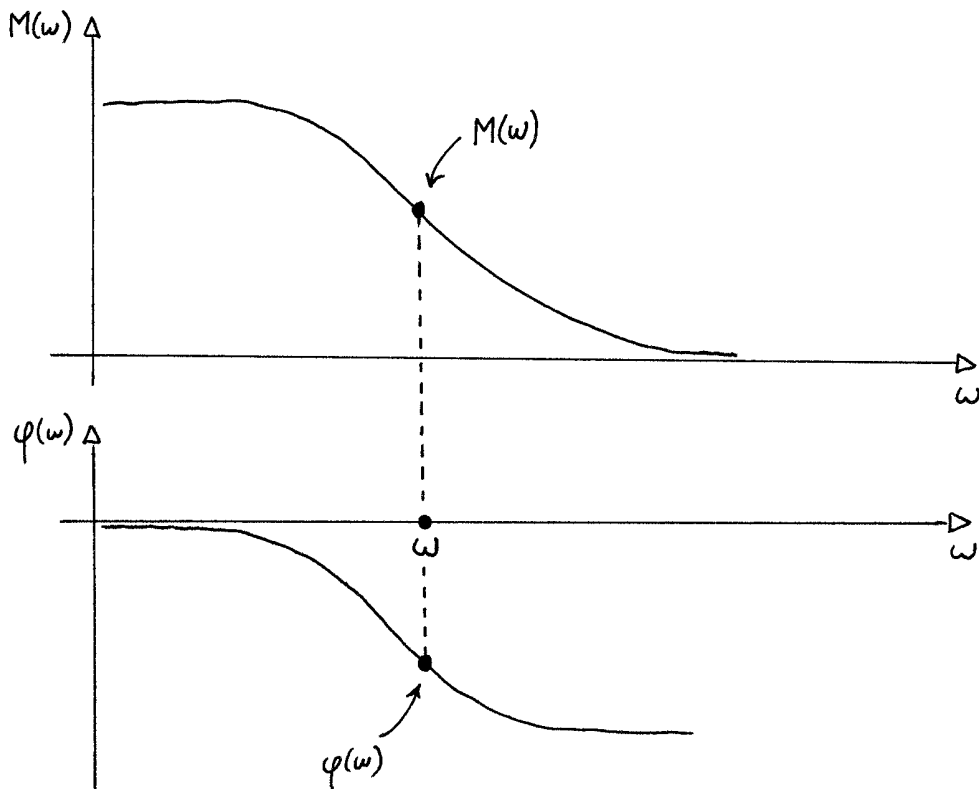
2. diagramma di Bode

7

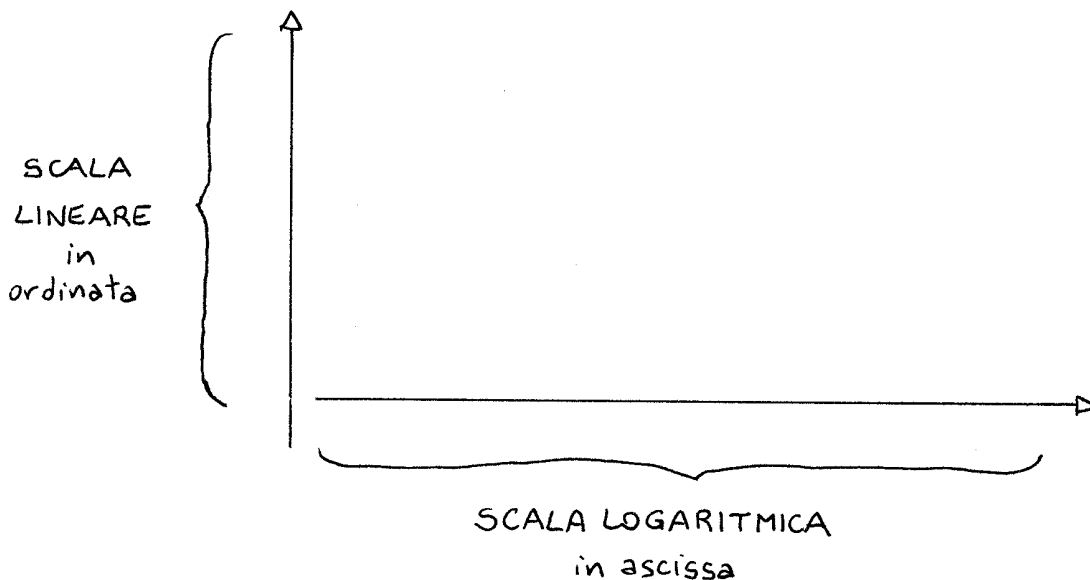
È una coppia di grafici: il primo rappresenta il modulo della risposta armonica in funzione della pulsazione, mentre il secondo ne rappresenta la fase.

$$W(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

↓ ↓
modulo fase

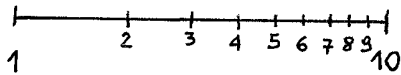
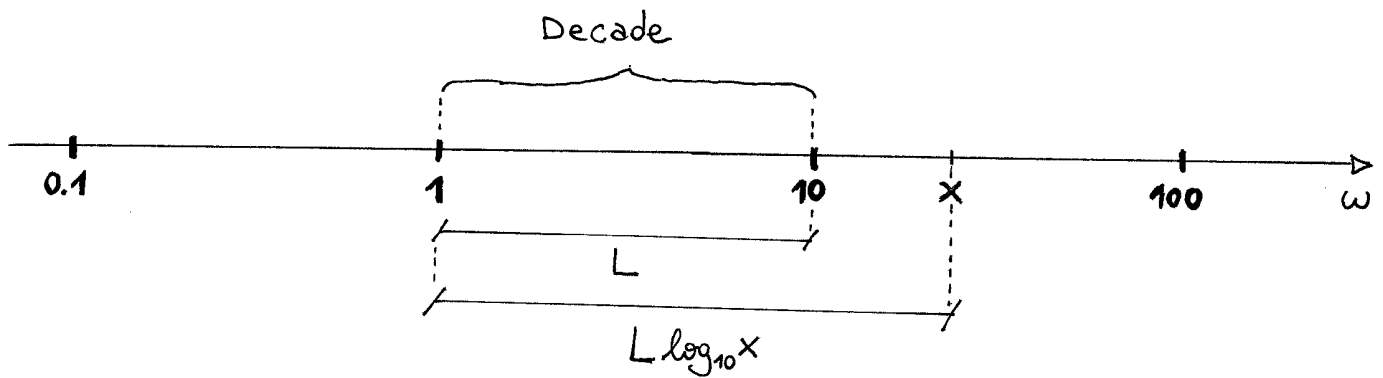


Tipicamente i diagrammi di Bode si tracciano su carta semilogaritmica:



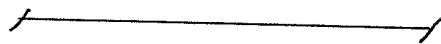
SCALA LOGARITMICA

L'asse è diviso in DECADE (intervalli di uguale ampiezza):



Osservazioni

1. $\omega=0$ non è rappresentabile su scala logaritmica
2. Se L è la lunghezza di una decade, allora $|L \log_{10} X|$ è la distanza di $\omega=x$ da $\omega=1$ su scala logaritmica (se $x < 1$ verso sinistra, se $x > 1$ verso destra).



Tipicamente, nel diagramma di Bode del modulo della funzione di risposta armonica, il modulo è rappresentato in scala decibel (dB):

• Se $X > 0$, allora $\boxed{X_{dB} = 20 \log_{10} X}$
 ↓
 valore di X in dB

esempi - $1_{dB} = 0 \text{ dB}$; $10_{dB} = 20 \text{ dB}$; $0.1_{dB} = -20 \text{ dB}$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{dB} \approx -3 \text{ dB} \dots$

Dato X_{dB} , come si ricava X in scala assoluta?

$$\boxed{X = 10^{\frac{X_{dB}}{20}}}$$

esempio - 30 dB corrisponde a $X = 10^{\frac{30}{20}} \approx 31.62$

Ricapitolando:

3

DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO

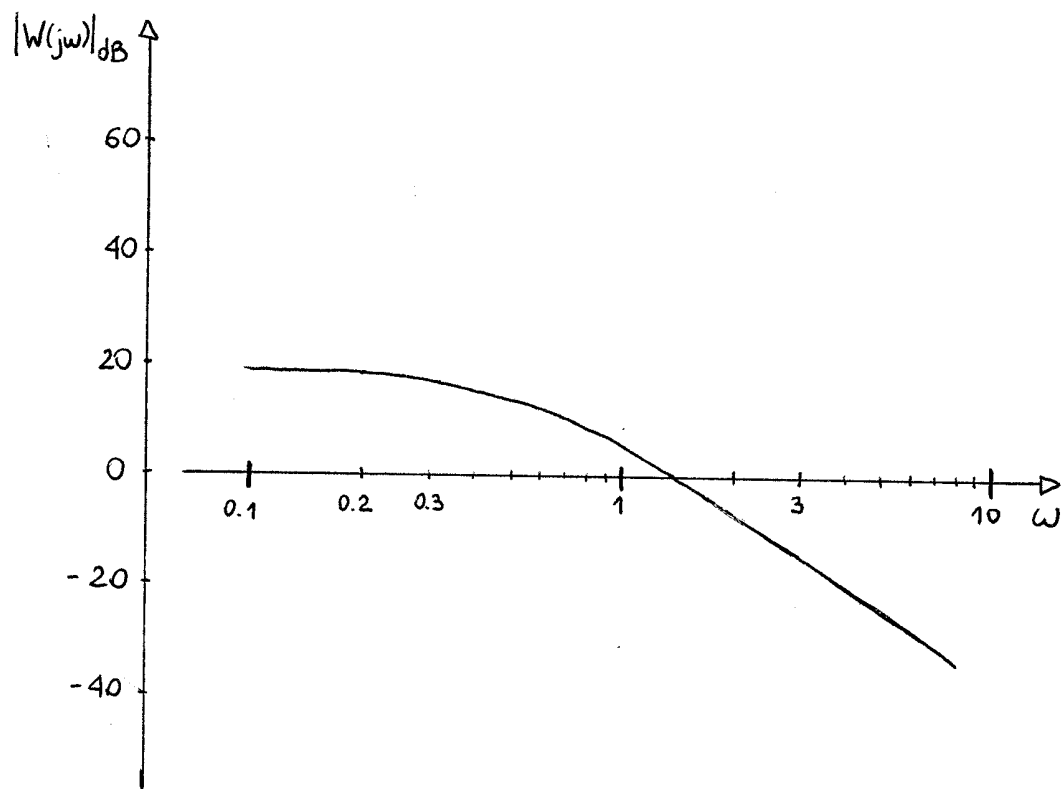


DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE

