

Siano $f(k)$ e $g(k)$ successioni con trasformate $\mathcal{Z}$ $F(z)$ e $G(z)$, rispettivamente.

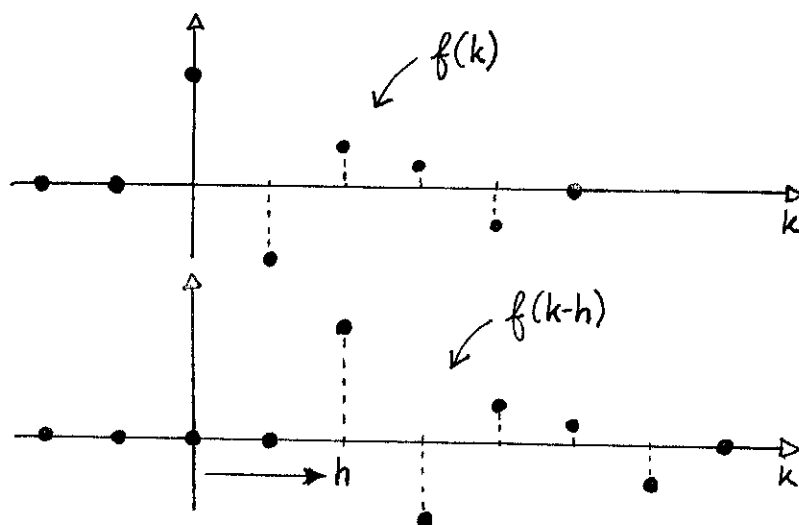
- linearità

$$\mathcal{Z}[c_1 f(k) + c_2 g(k)] = c_1 F(z) + c_2 G(z) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- ritardo (scorrimento verso destra)

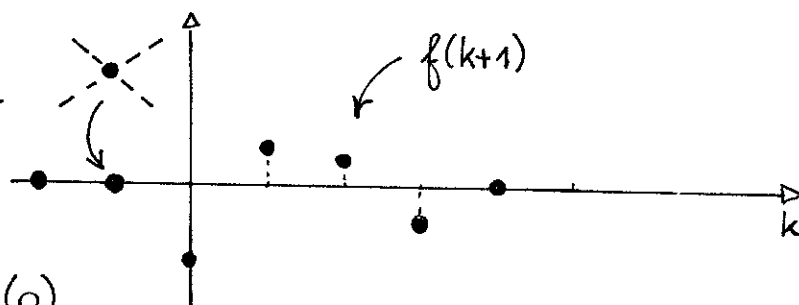
$$\mathcal{Z}[f(k-h)] = z^{-h} F(z)$$

traslazione verso destra
di h passi



- anticipo (scorrimento verso sinistra)

perché consideriamo
successioni nulle
per k negativi



$$\mathcal{Z}[f(k+1)] = z F(z) - z f(0)$$

Iterando:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k+2)] &= z \mathcal{Z}[f(k+1)] - z f(1) = z [z F(z) - z f(0)] - z f(1) = \\ &= z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1) \end{aligned}$$

etc.

Assumendo $f(0)=f(1)=\dots=f(h-1)=0$:

$$\mathcal{Z}[f(k+h)] = z^h F(z)$$

- traslazione nel dominio di z

$$\mathcal{Z}[a^k f(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

esempio

$$\mathcal{Z}[a^k \mathbb{1}(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z-a}$$

$\downarrow f(k) = \mathbb{1}(k) \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1}$

- trasformata della somma di convoluzione

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{j=0}^k f(k-j)g(j)\right] = F(z)G(z)$$

NOTA - Attenzione!

E' assolutamente falso che

$$\mathcal{Z}[f(k) \cdot g(k)] = F(z)G(z)$$

- Teorema del valor finale

Se entrambi i limiti esistono finiti, allora:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

esempio

$$f(k) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2\right] \mathbb{1}(k)$$

Si ha:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = 2$$

D'altra parte:

(3)

$$F(z) = \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k 1(k) + 2 \cdot 1(k) \right] = \mathcal{Z} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k 1(k) \right] + 2 \mathcal{Z} [1(k)] =$$

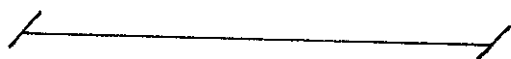
↓
per la proprietà
di linearità

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + 2 \frac{z}{z - 1} = \frac{3z^2 - 2z}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cancel{z-1}}{z} \frac{3z^2 - 2z}{(z - \frac{1}{2})(\cancel{z-1})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$, come affermato dal Teorema del
Valor finale.



ANTITRASFORMATE $\mathcal{Z}$

Data una trasformata $\mathcal{Z}$ razionale $F(z)$, come è possibile risalire alla
corrispondente successione $f(k)$?

1° passo

$$\text{Definire } \tilde{F}(z) = \frac{1}{z} F(z)$$

2° passo

Scomporre $\tilde{F}(z)$ in fratti semplici

3° passo

Ottenere di nuovo $F(z)$ da $\tilde{F}(z)$ scomposta in fratti semplici:

$$F(z) = z \tilde{F}(z)$$

4° passo

Antitrasformare $F(z)$ utilizzando le tabelle.

Esempio

Antitrasformare $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$.

Si definisce:

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{z} F(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+2)}$$

Si scompone $\tilde{F}(z)$ in fratti semplici:

$$\tilde{F}(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+2}$$

dove:

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} z \tilde{F}(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z(z-1)(z+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \tilde{F}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{3}$$

$$C = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \tilde{F}(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{6} \frac{1}{z+2}$$

Si ottiene di nuovo $F(z)$:

$$F(z) = z \tilde{F}(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{6} \frac{z}{z+2}$$

Si antitrasforma $F(z)$:

$$f(k) = -\frac{1}{2} \delta_0(k) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-2)^k \right] \mathbb{1}(k)$$

Un altro metodo parte dalla scomposizione in fratti semplici di $F(z)$:

$$F(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}$$

dove:

(5)

$$A = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z/1) \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) F(z) = \lim_{z \rightarrow -2} (z/2) \frac{1}{(z-1)(z/2)} = -\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$F(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z+2} \right)$$

→ NON SONO TRASFORMATE NOTEVOLI!

Per ottenere delle trasformate notevoli, dividiamo e moltiplichiamo per z :

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{3} z^{-1} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} z^{-1} \frac{z}{z+2}$$

$$= \underbrace{z^{-1}}_{\text{ritardo di un passo}} \left[\frac{1}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{z}{z+2} \right] = z^{-1} \hat{F}(z)$$

ritardo di un passo
(scorrimento verso destra)

dove si è posto $\hat{F}(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{3} \frac{z}{z+2}$

Si ha:

$$\hat{f}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\hat{F}(z)] = \frac{1}{3} [1 - (-2)^k] \mathbb{1}(k)$$

e quindi:

$$f(k) = \hat{f}(k-1) = \frac{1}{3} [1 - (-2)^{k-1}] \mathbb{1}(k-1)$$

NOTA - Con i due metodi, abbiamo ottenuto due espressioni differenti per $f(k)$, ma che sono ovviamente equivalenti. Infatti:

$$\frac{1}{3} [1 - (-2)^{k-1}] \mathbb{1}(k-1) = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} (-2)^k \right] \mathbb{1}(k-1) = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-2)^k \right] \mathbb{1}(k) - \frac{1}{2} \delta_0(k)$$

Applicazione delle trasformate Z alla soluzione di equazioni lineari stazionarie

• forma di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & (TD.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k) + Du(k) & (TD.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 & (TD.3) \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata Z a (TD.1):

$$\underbrace{zX(z) - zx_0}_{Z[x(k+1)]} = \underbrace{A}_{Z[x(k)]} \underbrace{X(z)}_{Z[x(k)]} + \underbrace{BU(z)}_{Z[u(k)]}$$

$X(z)$ è l'incognita dell'equazione...

$$\Rightarrow zX(z) - AX(z) = zx_0 + BU(z)$$

$$\Rightarrow (zI - A)X(z) = zx_0 + BU(z)$$

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per $(zI - A)^{-1}$:

$$X(z) = z(zI - A)^{-1}x_0 + (zI - A)^{-1}BU(z)$$

Ricordando che:

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA, } x_e(k)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j)}_{\text{RISPOSTA FORZATA, } x_f(k)}$$

deduciamo:

$$Z[x_e(k)] = z(zI - A)^{-1}x_0 \quad - \text{trasformata Z della risposta libera -}$$

$$Z[x_f(k)] = (zI - A)^{-1}BU(z) \quad - \text{trasformata Z della risposta forzata -}$$

Per l'uscita:

(7)

$$Y(z) = C X(z) + D U(z) =$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k)] &= C \left[z(zI-A)^{-1} x_0 + (zI-A)^{-1} B U(z) \right] + D U(z) = \\ &= z C (zI-A)^{-1} x_0 + [C (zI-A)^{-1} B + D] U(z) \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$y(k) = \underbrace{C A^k x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA, } y_e(k)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(j)}_{\text{RISPOSTA FORZATA, } y_f(k)} + D u(k)$$

deduciamo:

$$\mathcal{Z}[y_e(k)] = z C (zI-A)^{-1} x_0$$

$$\mathcal{Z}[y_f(k)] = [C (zI-A)^{-1} B + D] U(z)$$

Definizione - Si definisce FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (ingresso-uscita) del sistema la funzione

$$W(z) = C (zI-A)^{-1} B + D$$

Essa rappresenta il rapporto tra la trasformata $\mathcal{Z}$ dell'uscita e la trasformata $\mathcal{Z}$ dell'ingresso del sistema con condizioni iniziali nulle.
Infatti:

$$Y(z) = z C (zI-A)^{-1} \underset{\substack{|| \\ 0}}{x_0} + W(z) U(z) \Rightarrow$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

• equazioni alle differenze ordinarie

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = \\ = b_{n-1}u(k+n-1) + \dots + b_1u(k+1) + b_0u(k)$$

Assumiamo condizioni iniziali nulle:

$$y(0) = y(1) = \dots = y(n-1) = 0$$

e applichiamo la trasformata z all'equazione:

$$z^n Y(z) + a_{n-1}z^{n-1}Y(z) + \dots + a_1zY(z) + a_0Y(z) = \\ = b_{n-1}z^{n-1}U(z) + \dots + b_1zU(z) + b_0U(z)$$

$$\Rightarrow (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)Y(z) = (b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0)U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} U(z)$$

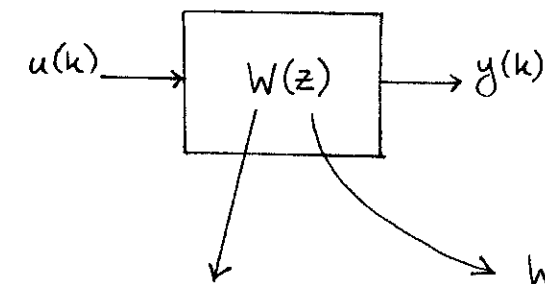
↓
 $W(z)$

(FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del sistema)

↪ infatti coincide con il rapporto tra $Y(z)$ e $U(z)$
con condizioni iniziali nulle

Ricapitolando:

9



$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$
partendo dall'equazioni
in forma di stato

$W(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}$
partendo dall'equazione alle differenze

Nota l'ingresso $u(k)$, la risposta forzata $y_f(k)$ si ottiene secondo il seguente procedimento:

1° passo

Calcolare la trasformata z $U(z)$ dell'ingresso $u(k)$

2° passo

Ottenere la trasformata z $Y_f(z)$ dell'uscita forzata $y_f(k)$ attraverso la relazione

$$Y_f(z) = W(z)U(z)$$

3° passo

Antitrasformare $Y_f(z)$.

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO (Tempo discreto)

$$W(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0}$$

- ORDINE : grado del denominatore di $W(z)$
- POLI : radici del denominatore di $W(z)$
- ZERI : radici del numeratore di $W(z)$

- STABILITÀ ILUL (Ingressi Limitati - Uscite Limitate)

Il sistema è stabile in senso ILUL se e solo se tutti i poli di $W(z)$ hanno modulo minore (strettamente) di 1.

NOTA - Un sistema può essere stabile in senso ILUL, ma non asintoticamente stabile.

↓ infatti possono verificarsi cancellazioni zero-polo instabili quando si calcola

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$\frac{\text{Agg}(zI - A)}{\det(zI - A)}$$

$$\downarrow$$

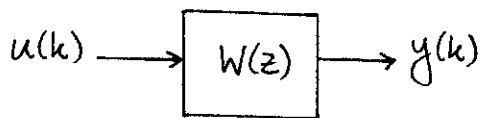
polinomio caratteristico del sistema

=> i poli del sistema sono in generale un sottoinsieme degli autovalori del sistema

- GUADAGNO IN CONTINUA

Dato un sistema stabile in senso ILUL, si definisce guadagno in continua del sistema il valore assunto dalla funzione di trasferimento $W(z)$ in $z=1$.

Che cosa rappresenta?



Supponiamo di applicare l'ingresso $u(k) = 1(k)$ [gradino unitario]

Dunque $U(z) = \frac{z}{z-1}$, e

$$Y(z) = W(z)U(z) = W(z) \frac{z}{z-1}$$

Quanto vale $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$? Applichiamo il Teorema del Valor Finale:

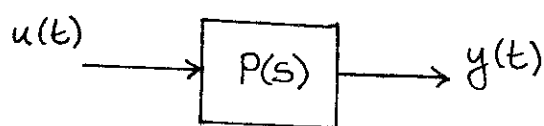
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W(z) \frac{z}{z-1} = W(1)$$

$\Rightarrow$ Il guadagno in continua è il valore a regime permanente (cioè per $k \rightarrow +\infty$) dell'uscita $y(k)$ quando in ingresso è applicato un gradino unitario.

$\hookrightarrow$ ha senso solo per sistemi stabili in senso ILUL

Interconnessioni di sistemi - Diagrammi a blocchi

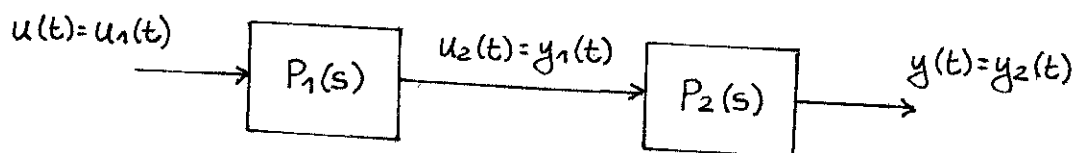
Abbiamo rappresentato un sistema come una "scatola" con una freccia entrante (INGRESSI) e una freccia uscente (USCITE):



La dinamica del sistema è rappresentata dalla sua funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Cosa succede se si connettono due o più sistemi?

CONNESSIONE IN SERIE (O IN CASCATA)



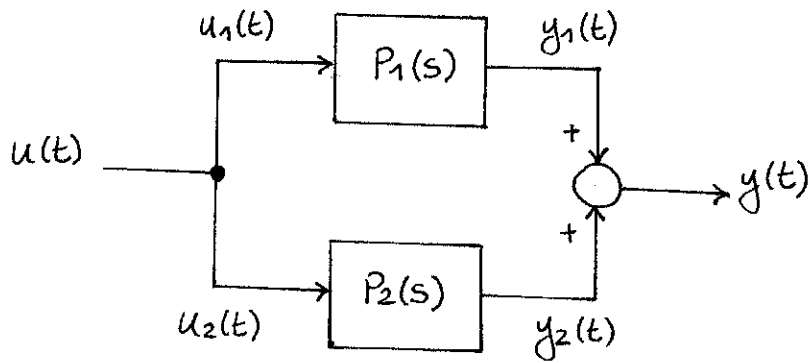
$$Y(s) = Y_2(s) = P_2(s) U_2(s) = P_2(s) Y_1(s) = P_2(s) P_1(s) U_1(s) = P_2(s) P_1(s) U(s)$$

$\Rightarrow$ La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è

$$P(s) = P_2(s) P_1(s)$$

CONNESSIONE IN PARALLELO

12

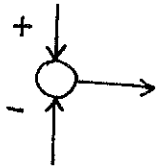


$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) = P_1(s)U_1(s) + P_2(s)U_2(s) = \\ &= P_1(s)U(s) + P_2(s)U(s) = [P_1(s) + P_2(s)]U(s) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è

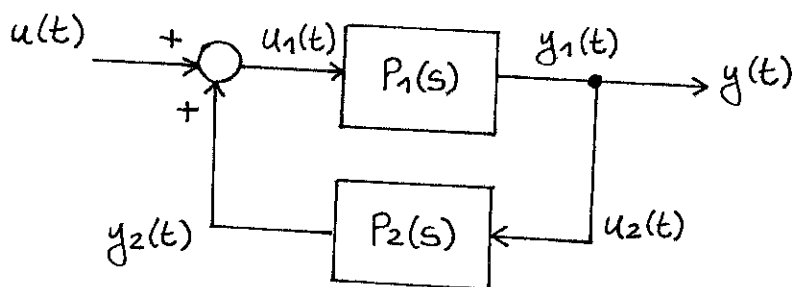
$$P(s) = P_1(s) + P_2(s)$$

Attenzione -



$$\Rightarrow P(s) = P_1(s) - P_2(s), \text{ etc.}$$

CONNESSIONE IN RETROAZIONE



$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) = P_1(s)U_1(s) = P_1(s)[U(s) + Y_2(s)] = \\ &= P_1(s)[U(s) + P_2(s)U_2(s)] = P_1(s)[U(s) + P_2(s)Y(s)] \\ &= P_1(s)U(s) + P_1(s)P_2(s)Y(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [1 - P_1(s)P_2(s)]Y(s) = P_1(s)U(s)$$

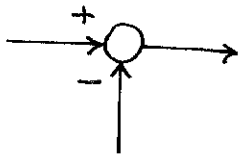
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{P_1(s)}{1 - P_1(s)P_2(s)} U(s)$$

13

$\Rightarrow$ La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è

$$P(s) = \frac{P_1(s)}{1 - P_1(s)P_2(s)}$$

Attenzione -



$$\Rightarrow P(s) = \frac{P_1(s)}{1 + P_1(s)P_2(s)}$$