

Applicazione delle trasformate di Laplace alla soluzione di equazioni lineari stazionarie• forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & (Tc.1) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & (Tc.2) \\ x(0) = x_0 & (Tc.3) \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Laplace a (Tc.1):

$$\underbrace{sX(s) - x_0}_{\mathcal{L}[\dot{x}(t)]} = \underbrace{A}_{\mathcal{L}[x(t)]} \underbrace{X(s)}_{\mathcal{L}[u(t)]} + \underbrace{B}_{\mathcal{L}[u(t)]} \underbrace{U(s)}_{\mathcal{L}[u(t)]}$$

$X(s)$ è l'incognita dell'equazione...

$$\Rightarrow sX(s) - Ax(s) = x_0 + BU(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$$

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri per $(sI - A)^{-1}$:

$$\boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)}$$

Ricordando che:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\substack{\text{RISPOSTA} \\ \text{LIBERA, } x_e(t)}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\substack{\text{RISPOSTA} \\ \text{FORZATA, } x_f(t)}}$$

deduciamo:

$$\mathcal{L}[x_e(t)] = (sI - A)^{-1}x_0 \quad - \text{trasformata di Laplace della risposta libera -}$$

$$\mathcal{L}[x_f(t)] = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad - \text{trasformata di Laplace della risposta forzata -}$$

Per l'uscita:

2

$$\begin{aligned} Y(s) &= C X(s) + D U(s) = \\ \mathcal{L}[y(t)] &= C \left[(sI-A)^{-1} x_0 + (sI-A)^{-1} B U(s) \right] + D U(s) = \\ &= C(sI-A)^{-1} x_0 + \left[C(sI-A)^{-1} B + D \right] U(s) \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$y(t) = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA, } y_e(t)} + \underbrace{\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA, } y_f(t)}$$

deduciamo:

$$\mathcal{L}[y_e(t)] = C(sI-A)^{-1} x_0$$

$$\mathcal{L}[y_f(t)] = \left[C(sI-A)^{-1} B + D \right] U(s)$$

Definizione - Si definisce FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (ingresso-uscita) del sistema la funzione

$$W(s) = C(sI-A)^{-1} B + D$$

Essa rappresenta il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema con condizioni iniziali nulle. Infatti:

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1} \underbrace{x_0}_{=0} + W(s) U(s) \Rightarrow \boxed{W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

• equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ &= b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$

Assumiamo condizioni iniziali nulle:

$$y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} = 0$$

e applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione:

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= \\ &= b_{n-1} s^{n-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$$

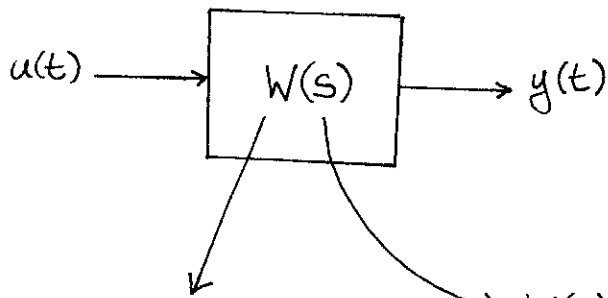
↓
W(s)

(FUNZIONE DI TRASFERIMENTO del sistema)

↪ infatti coincide con il rapporto tra $Y(s)$ e $U(s)$
con condizioni iniziali nulle

Ricapitolando:

4



$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

partendo dalle equazioni in
forma di stato

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

partendo dall'equazione differenziale

Noto l'ingresso $u(t)$, la risposta forzata $y_f(t)$ si ottiene secondo il seguente procedimento:

1° passo

Calcolare la trasformata di Laplace $U(s)$ dell'ingresso $u(t)$.

2° passo

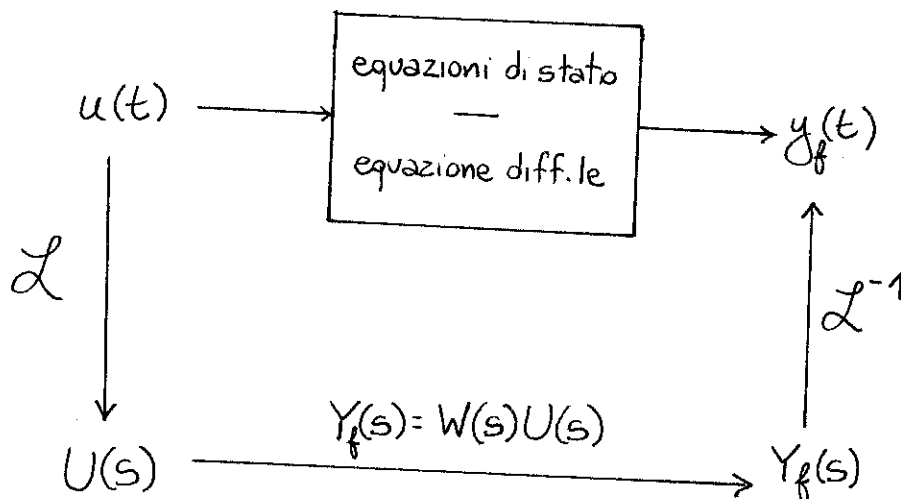
Ottenere la trasformata di Laplace $Y_f(s)$ dell'uscita forzata $y_f(t)$ attraverso la relazione

$$Y_f(s) = W(s)U(s).$$

3° passo

Antitrasformare $Y_f(s)$.

Graficamente:

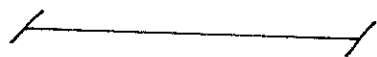


FUNZIONI DI TRASFERIMENTO (tempo continuo)

5

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

- Si definisce ORDINE della funzione di trasferimento il grado del polinomio a denominatore
- Si definiscono POLI della funzione di trasferimento le radici del polinomio a denominatore
- Si definiscono ZERI della funzione di trasferimento le radici del polinomio a numeratore.



STABILITA' ILUL (Ingressi Limitati - Uscite Limitate)

Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Essendo:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Agg}(sI - A)$$

risulta:

$$W(s) = C \frac{\text{Agg}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

↗ matrice polinomiale

Dunque, dato che $\det(sI - A)$ è il polinomio caratteristico di A , concludiamo che
|| i POLI della funzione di trasferimento sono, in generale, un sottoinsieme
|| degli AUTOVALORI del sistema

↘
potrebbero esserci cancellazioni tra zeri e poli

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [-2 \ 1]$.

Si ha:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

Dunque gli autovalori del sistema sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.

D'altra parte:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

$\swarrow$ $\det(sI - A)$ $\searrow$ $\text{Agg}(sI - A)$

e quindi:

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [-2 \ 1] \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 - s - 2} [-2 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \frac{\cancel{s-2}}{(s+1)\cancel{(s-2)}} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

$\swarrow$ cancellazione zero-polo

$W(s)$ ha un unico polo, cioè $p_1 = \lambda_1 = -1$.

L'autovalore $\lambda_2 = 2$ non è polo di $W(s)$.

Definizione - Il sistema è stabile in senso LVL se e solo se tutti i poli di $W(s)$ hanno parte reale negativa.

OSSERVAZIONI

7

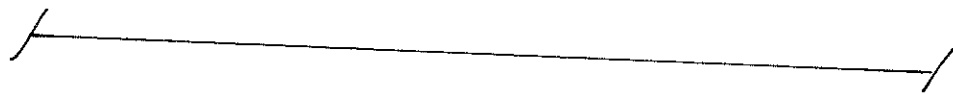
- Un sistema può essere stabile in senso ILUL, ma non asintoticamente stabile.

esempio - Nell'esempio precedente, il sistema è instabile perché $\lambda_2 > 0$.

Tuttavia, il sistema è ILUL stabile perché l'unico polo di $W(s)$ è $p_1 < 0$.

- Se un sistema è asintoticamente stabile, è anche stabile in senso ILUL.

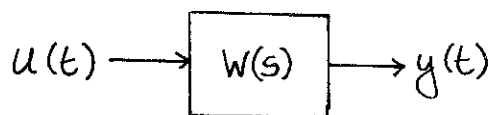
↙ eventuali cancellazioni zero-polo riguardano autovalori con parte reale negativa.



GUADAGNO IN CONTINUA

Dato un sistema stabile in senso ILUL, si definisce guadagno in continua del sistema il valore assunto dalla funzione di trasferimento $W(s)$ in $s=0$.

Che cosa rappresenta?



Supponiamo di applicare l'ingresso $u(t) = 1(t)$ [gradino unitario]

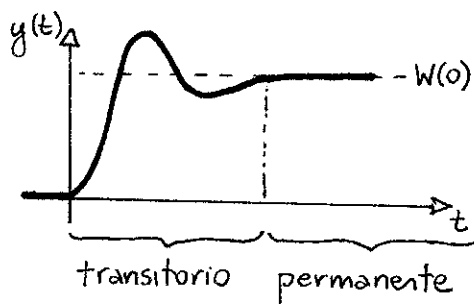
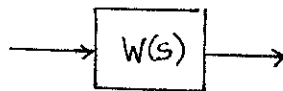
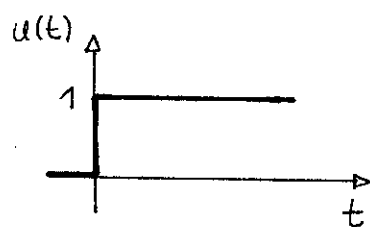
Dunque $U(s) = \frac{1}{s}$, e

$$Y(s) = W(s)U(s) = W(s) \frac{1}{s}.$$

Quanto vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$? Applichiamo il Teorema del Valor finale:

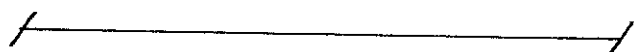
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} W(s) \frac{1}{\cancel{s}} = W(0)$$

$\Rightarrow$ Il guadagno in continua è il valore a regime permanente (cioè per $t \rightarrow \infty$) dell'uscita $y(t)$ quando in ingresso è applicato un gradino unitario.



8

NOTA- Il guadagno in continua ha senso solo per sistemi stabili in senso LUL



TRASFORMATE Z

Motivazione:

- calcolo della risposta di sistemi lineari stazionari a tempo discreto
- calcolo della soluzione di equazioni alle differenze lineari stazionarie



Definizione - Data una successione $f(k)$, $k=0,1,2,\dots$, si definisce trasformata Z di $f(k)$, e si indica con $Z[f(k)]$ o $F(z)$, la funzione

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

definita per $z \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ω si chiama regione di convergenza, ed è formata da tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che la serie converge.

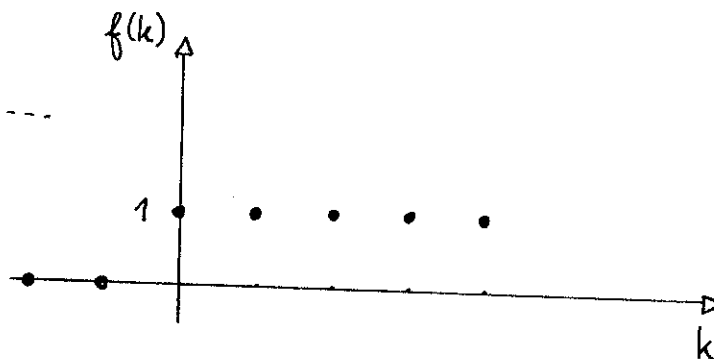
Esempi notevoli

- successione gradino unitario

$$\delta_{-1}(k) = \mathbb{1}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Z[\mathbb{1}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}(k) z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{se } |z^{-1}| < 1 \equiv |z| > 1$$



Dunque:

$$\mathcal{Z}[\mathbb{1}(k)] = \frac{z}{z-1}$$

con regione di convergenza $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

NOTA- Abbiamo sfruttato la serie geometrica...

$$S_N(x) = 1 + x + \dots + x^N$$

$$x S_N(x) = x + x^2 + \dots + x^{N+1}$$

fare la differenza

$$(1-x) S_N(x) = 1 - x^{N+1}$$

$$\Rightarrow S_N(x) = \sum_{k=0}^N x^k = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

Per $N \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1$$

• successione esponenziale

$$f(k) = a^k \cdot \mathbb{1}(k)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}[a^k \cdot \mathbb{1}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\text{se } |az^{-1}| < 1 \equiv |z| > |a|$$

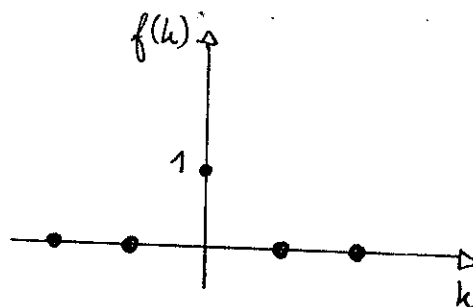
Dunque:

$$\mathcal{Z}[a^k \cdot \mathbb{1}(k)] = \frac{z}{z-a}$$

con regione di convergenza $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |a|\}$.

• successione impulso unitario

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

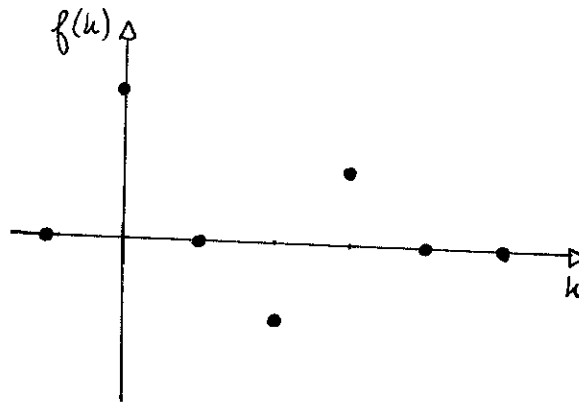


$$\mathcal{Z}[\delta_0(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(k) z^{-k} = 1$$

con regione di convergenza $\Omega = \mathbb{C}$.

Esempio

$$f(k) = \begin{cases} 2 & \text{se } k=0 \\ -1 & \text{se } k=2 \\ 1 & \text{se } k=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = 2 - z^{-2} + z^{-3} = \frac{2z^3 - z + 1}{z^3}$$

con regione di convergenza $\Omega = \mathbb{C}$.