Dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo descritto dalle equazioni in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con condizione iniziale $x(0) = x_0$, abbiamo visto che l'andamento di $x(t)$ è dato dall'espressione:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\substack{\text{RISPOSTA LIBERA } x_\ell(t) \\ \text{(dipende da } x_0)}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\substack{\text{RISPOSTA FORZATA } x_f(t) \\ \text{(dipende da } u(t))}}$$

mentre quello di $y(t)$ è dato da:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{RISPOSTA LIBERA } y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{RISPOSTA FORZATA } y_f(t)}$$

Abbiamo inoltre studiato tecniche per il calcolo di e^{At} basate su trasformazioni di coordinate nello spazio di stato, e utilizzate per il calcolo della risposta libera.

Come possiamo calcolare la risposta forzata?

1° metodo

Calcolare e^{At} e poi l'integrale

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad \text{(INTEGRALE DI CONVOLUZIONE)}$$

nota l'espressione funzionale dell'ingresso $u(t)$.

ESEMPIO

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vogliamo calcolare la <u>risposta forzata nell'uscita</u> corrispondente all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dobbiamo quindi valutare l'integrale:

$$y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau.$$

Per la matrice A risulta

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

e $Ce^{At}B = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$.

Dunque:

$$y_f(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = \int_0^t \left[\frac{1}{2}e^{(t-\tau)} + \frac{3}{2}e^{-2(t-\tau)}\right]d\tau$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{(t-\tau)} + \frac{3}{4}e^{-2(t-\tau)}\right]_0^t = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-2t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

Come si vede dall'esempio, il procedimento può risultare anche molto elaborato...

2° metodo

Trasformate di Laplace...

Dato il sistema lineare, stazionario a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale ordinaria (in forma normale):

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_{n-1}\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

vogliamo calcolare la funzione incognita $y(t)$, nota l'espressione funzionale di $u(t)$ e le condizioni iniziali $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$.

1° metodo

Sappiamo che un'equazione differenziale ordinaria in forma normale può essere sempre riscritta in una equivalente forma di stato attraverso una opportuna definizione dello stato...

esempio

Nel caso

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

definendo lo stato come

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}$$

risulta

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

con

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi possiamo calcolare $y(t)$ attraverso l'espressione

$$y(t)=Ce^{At}x_0+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)$$

dove

$$x_0=x(0)=\begin{bmatrix} y(0) \\ \frac{dy(0)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso il metodo può risultare molto elaborato...

2° metodo

Trasformate di Laplace...

Introduciamo ora lo strumento delle Trasformate di Laplace...

Trasformate di Laplace

Definizione

Data una funzione $f:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, si definisce trasformata di Laplace (monolatera) di $f(t)$, e si indica con $\mathcal{L}[f(t)]$ o $F(s)$, la funzione

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

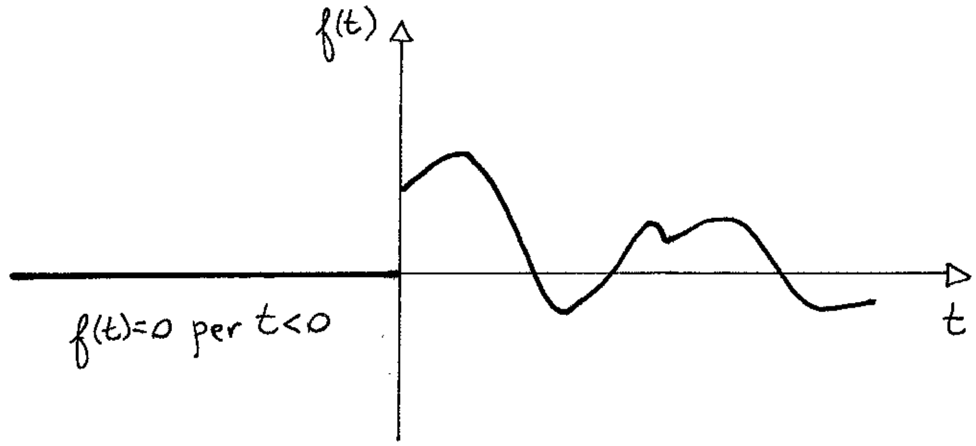
dove $s\in\Omega\subseteq\mathbb{C}$. Ω è detta regione di convergenza, ed è l'insieme degli $s\in\mathbb{C}$ tali che l'integrale esiste finito.

NOTA - Si osservi che $F(s)$ è una funzione di variabile complessa.
Inoltre, la trasformata di Laplace bilatera è definita come

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

Una trasformata monolatera può essere vista come una trasformata bilatera assumendo $f(t)=0$ per $t<0$. Infatti:

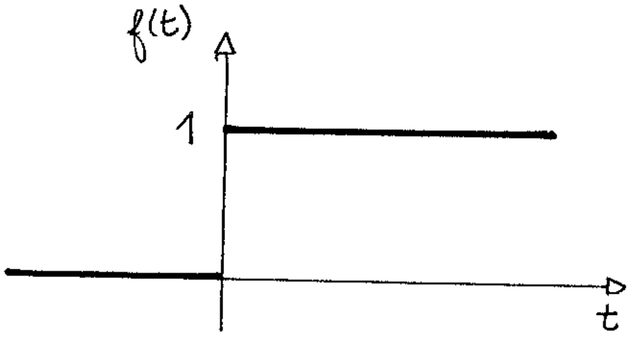
$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-st}dt}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{perché } f(t)=0 \text{ per } t<0}}+\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$



Esempi notevoli

- gradino unitario

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{se } t\geq 0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



La funzione gradino unitario si indica come $\mathbb{1}(t)$ o $\delta_{-1}(t)$.

Si ha:

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty}$$

NOTA - $e^{-st}=e^{-[Re(s)+i\,Im(s)]t}=\underbrace{e^{-Re(s)t}}\cdot\underbrace{e^{-i\,Im(s)t}}_{\text{limitato, periodico}}$

- tende a 0 per $t\to\infty$ se $Re(s)>0$
- uguale a 1 per ogni t se $Re(s)=0$
- tende a ∞ per $t\to\infty$ se $Re(s)<0$

Dunque l'integrale esiste finito se e solo se $Re(s)>0$, e

$$F(s)=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

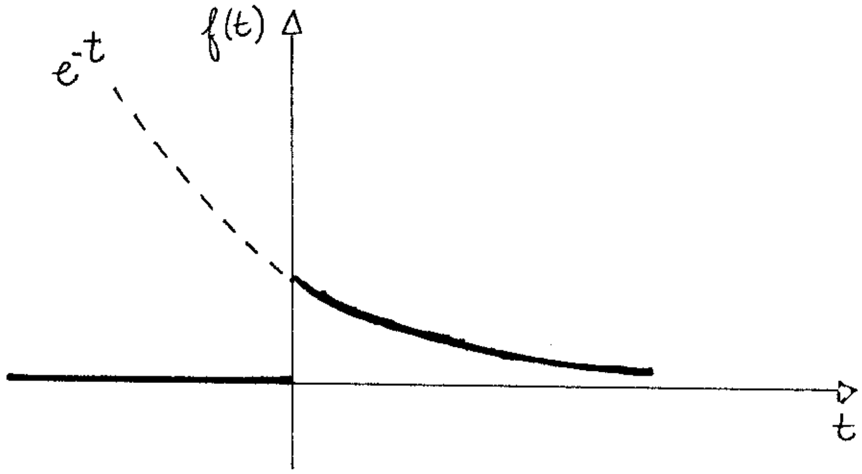
con $\Omega=\{s\in\mathbb{C}:\ Re(s)>0\}$ (regione di convergenza)

NOTA - La funzione gradino unitario è utile per definire funzioni nulle per $t<0$...

esempio - La funzione

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t} & \text{se } t\geq 0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

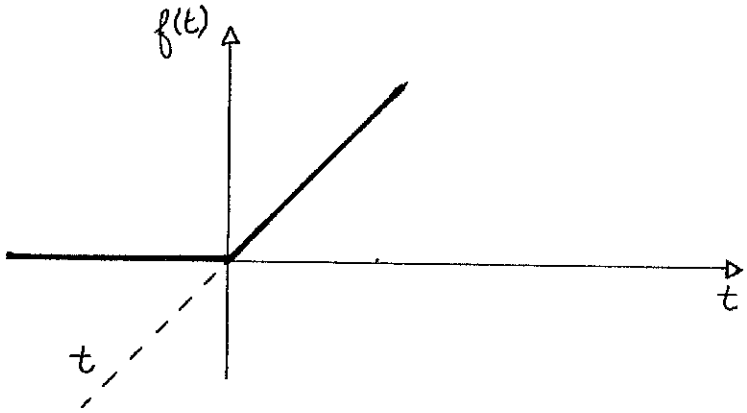
può essere scritta nella forma compatta $f(t)=e^{-t}\,\mathbb{1}(t)$



- rampa lineare

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = t \, \mathbb{1}(t)$$



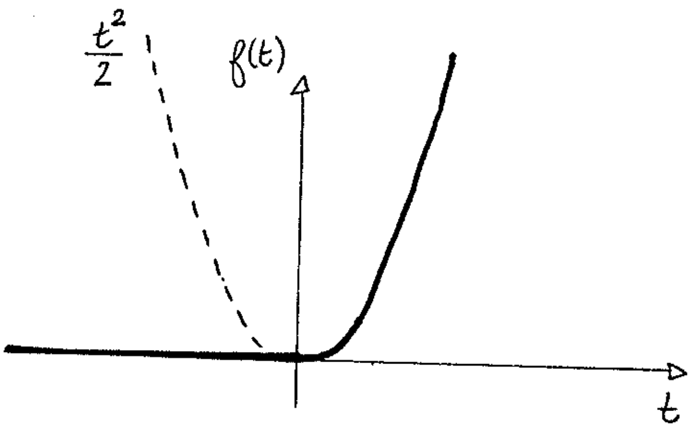
La funzione rampa lineare si indica con $\delta_{-2}(t)$. Risulta:

$$\mathcal{L}\left[t \cdot \mathbb{1}(t) \right] = \frac{1}{s^2}$$

- rampa quadratica

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{t^2}{2} \cdot \mathbb{1}(t)$$



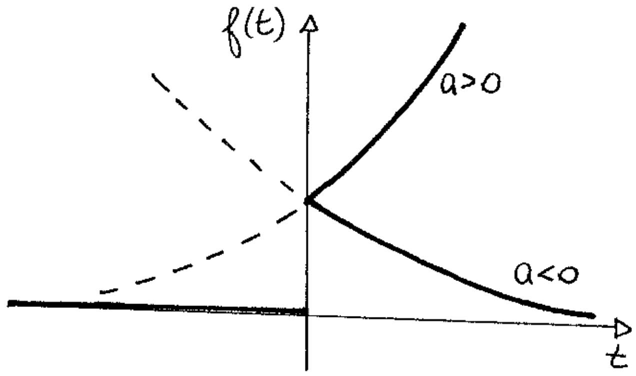
Risulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2} \cdot \mathbb{1}(t) \right] = \frac{1}{s^3}$$

- esponenziale

$$f(t)=\begin{cases} e^{at} & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=e^{at}\cdot \mathbb{1}(t)$$



Risulta:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\cdot \mathbb{1}(t)\right]=\frac{1}{s-a}$$

- esponenziale polinomiale

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at} & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{per } n=1,2,3,\dots$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}\cdot \mathbb{1}(t)$$

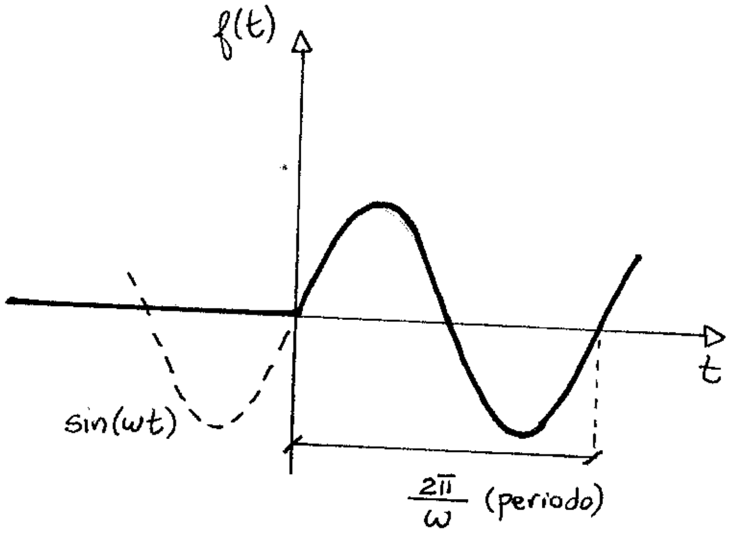
Risulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}\cdot \mathbb{1}(t)\right]=\frac{1}{(s-a)^n}$$

- sinusoide

$$f(t)=\begin{cases} \sin(\omega t) & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\sin(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)$$

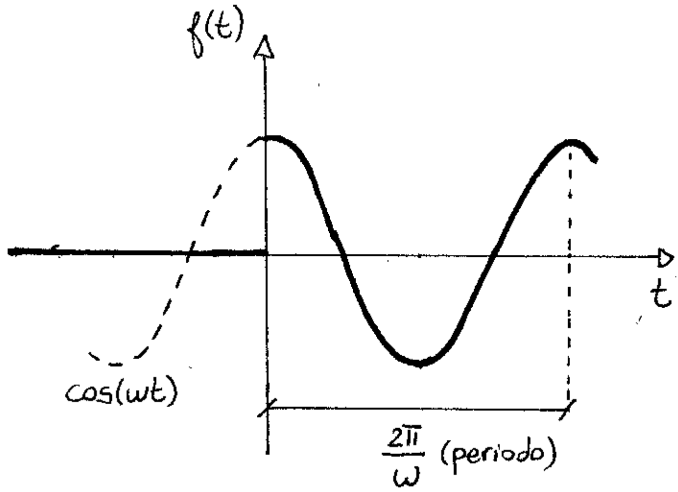


Risulta:

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

- cosinusoide

$$f(t)=\begin{cases}\cos(\omega t) & \text{se } t\geq 0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



$$\Longrightarrow \quad f(t)=\cos(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)$$

Risulta:

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Proprietà delle Trasformate di Laplace

Siano $f(t)$ e $g(t)$ funzioni con trasformate di Laplace $F(s)$ e $G(s)$, rispettivamente.

- linearità

$$\mathcal{L}\left[c_1 f(t)+c_2 g(t)\right]=c_1 F(s)+c_2 G(s) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

esempio

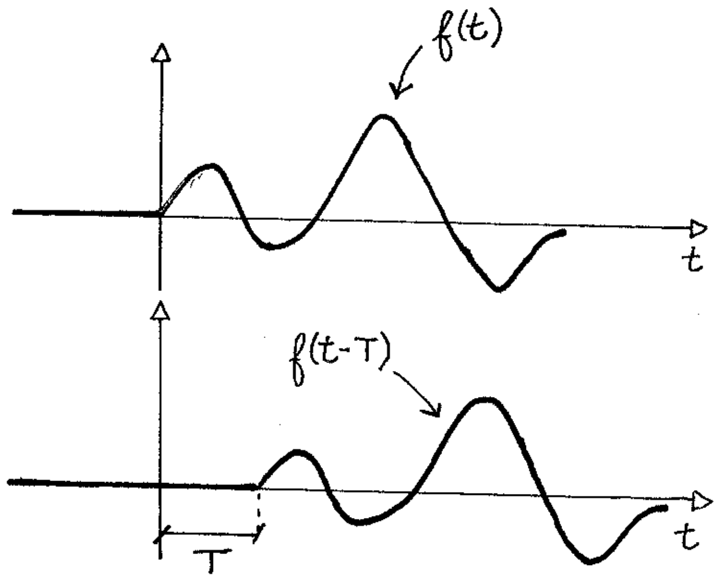
$$\mathcal{L}\left[(3-e^{-2t})\,\mathbb{1}(t)\right]=\mathcal{L}\Big[\underbrace{3}_{c_1}\cdot\underbrace{\mathbb{1}(t)}_{f(t)}\underbrace{-}_{c_2}\underbrace{e^{-2t}\cdot\mathbb{1}(t)}_{g(t)}\Big]=3\cdot F(s)-G(s)$$

$$=3\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}=\frac{2s+6}{s(s+2)}$$

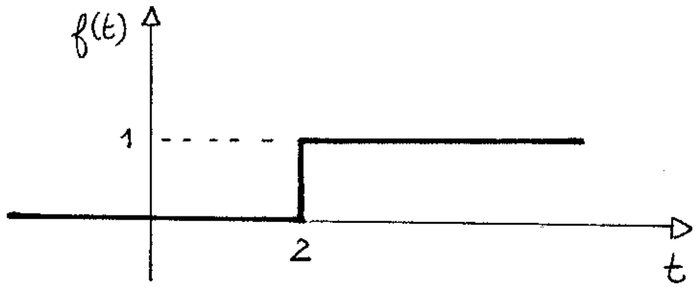
- traslazione temporale

$T>0$: ritardo

$$\mathcal{L}\left[f(t-T)\right]=F(s)e^{-sT}$$



esempio



La funzione in figura è un gradino unitario ritardato di $T=2$. Dunque:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\mathbb{1}(t-2)] = \frac{1}{s} e^{-2s}$$

- derivata nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

esempio

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left\{\cos(\omega t)\cdot \mathbb{1}(t)\right\}\right] = s\cdot\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\right] - \cos(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\Big|_{t=0^+} =$$

$$= s\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} - 1 = \frac{s^2}{s^2+\omega^2} - 1 = \frac{-\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

D'altra parte, seguendo un'altra strada:

$$\frac{d}{dt}\left\{\cos(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\right\} = -\omega\sin(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)$$

e quindi:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left\{\cos(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\right\}\right] = \mathcal{L}\left[-\omega\sin(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\right] = -\omega\,\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\cdot\mathbb{1}(t)\right] =$$

$$= -\omega\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{-\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

- derivata seconda nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}\right] = s\cdot\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] - \frac{df(0^+)}{dt} =$$

$$= s\left[sF(s) - f(0^+)\right] - \frac{df(0^+)}{dt} = s^2F(s) - s f(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt}$$

- <u>derivata n-esima nel tempo</u>

Assumiamo $f(0^+) = \frac{df(0^+)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1}f(0^+)}{dt^{n-1}} = 0$, Allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

<u>NOTA</u>- Derivare nel tempo corrisponde a moltiplicare per "s" nel dominio di Laplace

operazione differenziale

operazione algebrica

- <u>integrale nel tempo</u>

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\cdot F(s)$$

<u>esempio</u>

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathbb{1}(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[\mathbb{1}(t)\right] = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

D'altra parte, seguendo un'altra strada:

$$\int_0^t \mathbb{1}(\tau)\,d\tau = \int_0^t d\tau = \left[\tau\right]_0^t = t$$

e quindi:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \mathbb{1}(\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}\left[t\cdot\mathbb{1}(t)\right] = \frac{1}{s^2}$$

RAMPA LINEARE

<u>NOTE</u>

- la <u>rampa lineare</u> e' l'integrale del <u>gradino unitario</u>
- la <u>rampa quadratica</u> e' l'integrale della <u>rampa lineare</u>

<u>NOTA</u> - Integrare nel tempo corrisponde a moltiplicare per "$\frac{1}{s}$" nel dominio di Laplace.

⤳ Si osservi che derivata e integrale sono operazioni "inverse" nel tempo, a cui corrispondono operazioni "inverse" nel dominio di Laplace.

- traslazione nel dominio di Laplace

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

esempio

$$* \; \mathcal{L}\left[e^{at} \mathbb{1}(t)\right] = F(s-a) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(t) = \mathbb{1}(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$$

$$* \; \mathcal{L}\left[e^{at} \underbrace{\frac{t^2}{2} \mathbb{1}(t)}\right] = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^3}$$

$$\rightarrow f(t) = \frac{t^2}{2} \mathbb{1}(t)$$ -rampa quadratica-

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^3}$$

- trasformata dell'integrale di convoluzione

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau\right] = F(s) G(s)$$

NOTA- Attenzione!

È assolutamente falso che

$$\mathcal{L}\left[f(t) \cdot g(t)\right] = F(s) G(s)$$

- Teorema del valor finale

Se entrambi i limiti esistono finiti, allora:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)}$$

Esempio

* $f(t) = (2 + e^{-t})\,\mathbb{1}(t)$

  Si ha:

  $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 2$$

  D'altra parte:

  $$F(s) = 2\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{3s+2}{s(s+1)}$$

  e

  $$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\,\frac{3s+2}{\cancel{s}(s+1)} = 2$$

  i due limiti coincidono, come affermato dal teorema del valor finale

* $f(t) = (\sin(t) + e^{-t})\,\mathbb{1}(t)$

  Si ha che

  $$\lim_{t\to+\infty} f(t) \quad \text{non esiste}$$

  Invece:

  $$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2+s+2}{(s^2+1)(s+1)}$$

  e

  $$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s^2+s+2}{(s^2+1)(s+1)} = 0$$

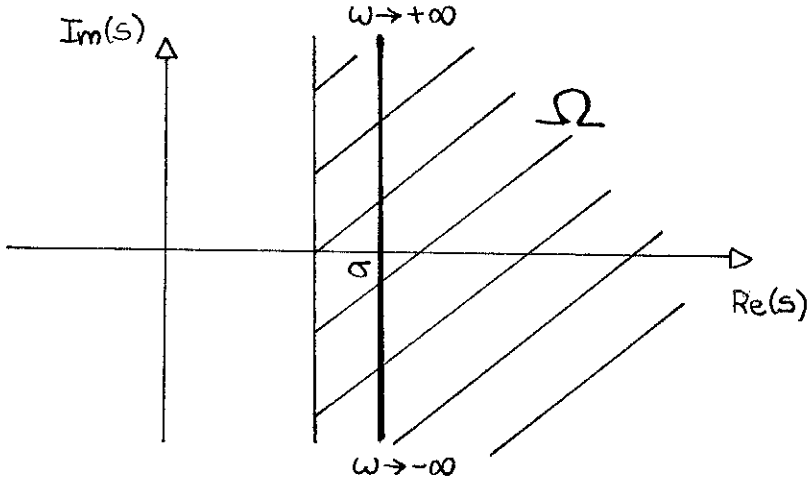
  non vale il teorema del valor finale perche' uno dei due limiti non esiste

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

Se $F(s)$ e' una trasformata di Laplace con regione di convergenza Ω, allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\,e^{st}\,ds$$

dove la retta verticale $\{s = \sigma + i\omega : -\infty < \omega < +\infty\}$ e' interna alla regione di convergenza Ω.



Tuttavia, il calcolo dell'integrale complesso (la variabile di integrazione è $s \in \mathbb{C}$) non risulta agevole, in generale...

Data una trasformata di Laplace razionale $F(s)$, il metodo che utilizzeremo per la sua antitrasformazione richiede la scomposizione di $F(s)$ in fratti semplici.

ESEMPIO

Antitrasformare $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-2)}$

⇝ La funzione razionale $F(s)$ può essere scomposta in fratti semplici nel seguente modo:

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

dove A e B sono coefficienti da determinare.

1° metodo

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{As-2A+Bs+B}{(s+1)(s-2)} = \frac{(A+B)s+(-2A+B)}{(s+1)(s-2)}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

Per l'uguaglianza dei polinomi a numeratore, deve risultare:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ 3B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$$

2° metodo

Osserviamo che:

$$F(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2} \implies A=(s+1)F(s)-B\frac{s+1}{s-2}$$

Calcolando il membro a destra in $s=-1$, il termine $B\frac{s+1}{s-2}$ si annulla, per cui risulta:

$$A=\lim_{s\to -1}(s+1)F(s)=\lim_{s\to -1}\cancel{(s+1)}\frac{1}{\cancel{(s+1)}(s-2)}=-\frac{1}{3}$$

Osserviamo poi che:

$$F(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2} \implies B=(s-2)F(s)-A\frac{s-2}{s+1}$$

Calcolando il membro a destra in $s=2$, il termine $A\frac{s-2}{s+1}$ si annulla, per cui risulta:

$$B=\lim_{s\to 2}(s-2)F(s)=\lim_{s\to 2}\cancel{(s-2)}\frac{1}{(s+1)\cancel{(s-2)}}=\frac{1}{3}$$

Quindi:

$$F(s)=-\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\mathcal{L}[e^{-t}\cdot 1(t)]}+\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\mathcal{L}[e^{2t}\cdot 1(t)]}$$

Sfruttando la linearità della trasformata di Laplace:

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}}_{\text{antitrasformata}}[F(s)]=\left[-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right]1(t)$$

In generale, supponiamo di voler antitrasformare la funzione razionale:

$$F(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

dove gli α e i β sono coefficienti reali.

<u>1° passo</u> - <u>Fattorizzare il denominatore di F(s)</u>

$$F(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\prod_{j=1}^{r}(s-p_j)^{q_j} \prod_{j=r+1}^{c}(s-p_j)^{q_j}(s-p_j^*)^{q_j}}$$

dove:

- $p_j \in \mathbb{R}$ sono le <u>radici reali</u>, $j=1,\dots,r$
- $p_j = \sigma_j + i\omega_j$ sono le <u>radici complesse</u> con $\omega_j > 0$, $j=r+1,\dots,c$
- q_j sono le <u>molteplicità algebriche</u> delle radici, $j=1,\dots,c$

<u>2° passo</u> - <u>Scomporre F(s) in fratti semplici</u>

$$F(s) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{q_j}\frac{R_{jh}}{(s-p_j)^h} + \sum_{j=r+1}^{c}\sum_{h=1}^{q_j}\left[\frac{R_{jh}}{(s-p_j)^h} + \frac{R_{jh}^*}{(s-p_j^*)^h}\right]$$

dove il <u>RESIDUO</u> R_{jh} è dato da:

$$R_{jh} = \lim_{s\to p_j}\frac{1}{(q_j-h)!}\frac{d^{q_j-h}}{ds^{q_j-h}}\left[(s-p_j)^{q_j}F(s)\right] \quad \forall j=1,\dots,c;\ \forall h=1,\dots,q_j$$

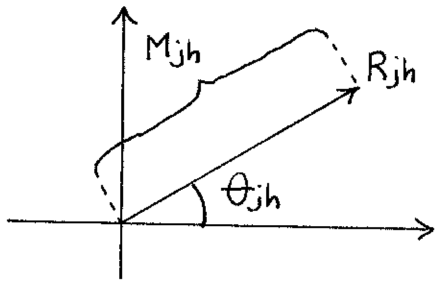
<u>3° passo</u> - <u>Antitrasformare sfruttando le trasformate notevoli</u>

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{q_j} R_{jh}\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{p_j t} + \sum_{j=r+1}^{c}\sum_{h=1}^{q_j}\left[R_{jh}\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{p_j t} + R_{jh}^*\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{p_j^* t}\right] & \underline{\text{se } t \geq 0} \\ f(t) = 0 \quad \text{e} \quad t<0 & \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Scrivendo R_{jh} nella forma

$$R_{jh} = \underbrace{M_{jh}}_{\text{modulo}}\, e^{i\overbrace{\theta_{jh}}^{\text{fase}}}$$



e

$$e^{p_j t} = e^{[\sigma_j + i\omega_j]t} = e^{\sigma_j t} \cdot e^{i\omega_j t},$$

e quindi

$$R_{jh}^{*} = M_{jh}\, e^{-i\theta_{jh}} \qquad \text{e} \qquad e^{p_j^{*} t} = e^{\sigma_j t} \cdot e^{-i\omega_j t},$$

si ha:

$$R_{jh} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{p_j t} + R_{jh}^{*} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{p_j^{*} t} = \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\sigma_j t} M_{jh} \left[e^{i\theta_{jh}} \cdot e^{i\omega_j t} + e^{-i\theta_{jh}} \cdot e^{-i\omega_j t} \right]$$

$$= \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\sigma_j t} M_{jh} \left[e^{i(\omega_j t + \theta_{jh})} + e^{-i(\omega_j t + \theta_{jh})} \right]$$

$$= 2\, M_{jh} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \theta_{jh})$$

NOTA -

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

Sommando:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x)$$

Dunque, per $t \geq 0$:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{q_j} R_{jh} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{p_j t} + \sum_{j=r+1}^{c} \sum_{h=1}^{q_j} 2 M_{jh} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \theta_{jh})$$