

$$1.I) \quad W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K(s + \frac{1}{2})}{(s^2 + 3s + 9)(s+p) + K(s + \frac{1}{2})}$$

$$\text{per } K=2, \quad W(s) = \frac{2s+1}{s^3 + (3+p)s^2 + (11+3p)s + (9p+1)}$$

Criterio di Routh-Hurwitz:

3	1	$11+3p$
2	$3+p$	$9p+1$
1	$\frac{(3+p)(11+3p) - (9p+1)}{3+p}$	
0	$9p+1$	

$$\begin{cases} 3+p > 0 & p > -3 \\ 3p^2 + 11p + 32 > 0 & \forall p \in \mathbb{R} \\ 9p+1 > 0 & p > -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{p > -\frac{1}{9}}$$

$$1.II) \quad E(s) = Y(s) - R(s) = [W(s) - 1] R(s)$$

$$W(s) - 1 = - \frac{(s^2 + 3s + 9)(s+p)}{s^3 + (3+p)s^2 + (9+3p+K)s + (9p + \frac{1}{2}K)}$$

3	1	$9+3p+K$
2	$3+p$	$9p + \frac{1}{2}K$
1	$\frac{(3+p)(9+3p+K) - 9p - \frac{1}{2}K}{3+p}$	
0	$9p + \frac{1}{2}K$	

$$(3+p)(9+3p+K) - 9p - \frac{1}{2}K = 27 + 3p + 3p^2 + pK + \frac{5}{2}K$$

Quindi il sistema ha solo modi convergenti per ogni $p \geq 0, K > 0$. Si può quindi applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = W(0) - 1 = - \frac{9p}{9p + \frac{1}{2}K}$$

$$(2) - \frac{9p}{9p + \frac{1}{2}K} < \frac{1}{100}$$

$$K > -1818p$$

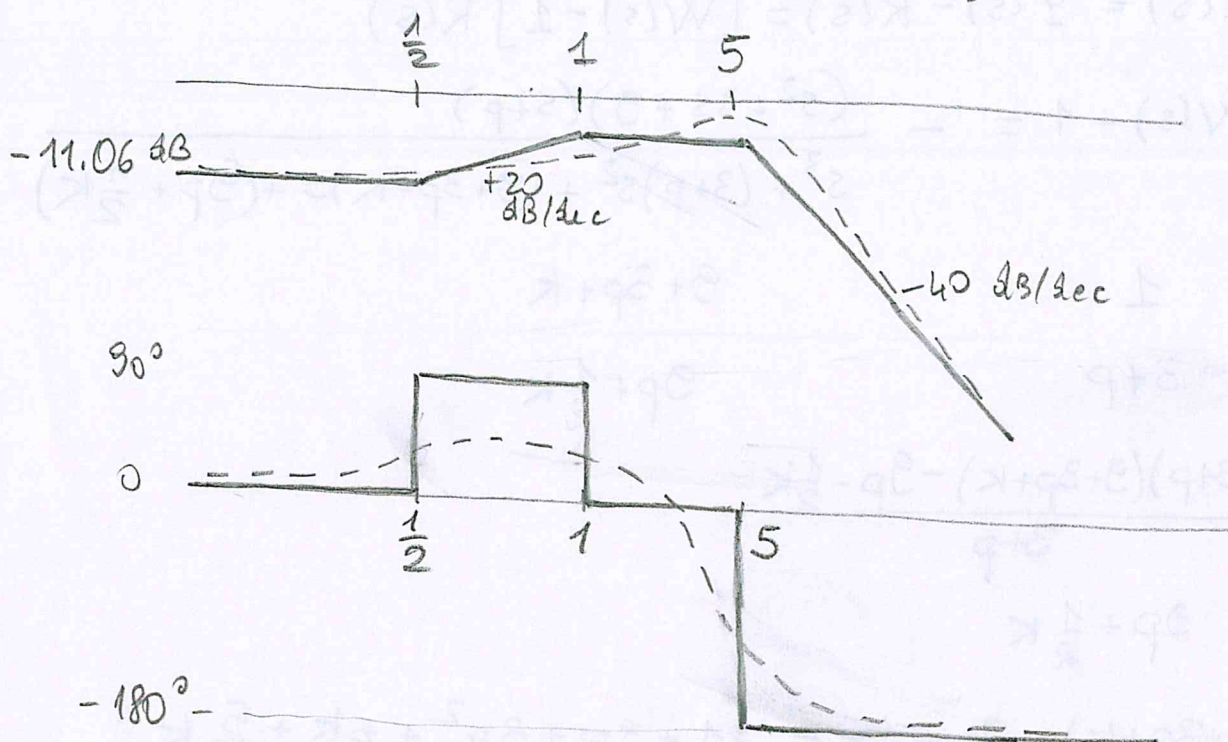
→ vero $\forall p \geq 0, K > 0$.

$$(b) p=0$$

$$1. III) p=2, K=14$$

$$W(s) = \frac{14(s + \frac{1}{2})}{s^3 + 5s^2 + 29s + 25} = \frac{14(s + \frac{1}{2})}{(s+1)(s^2 + 4s + 25)} =$$

$$= \frac{7}{25} \frac{(1+2s)}{(1+s)(1 + 2 \cdot \frac{2}{5}s + \frac{1}{5}s^2)}$$



Affinché l'ampiezza di $y_{perm}(t)$ sia maggiore di $\frac{1}{10}$ occorre $|W(j\omega)| > \frac{1}{10} = -20 \text{ dB}$

Dal diagramma di Bode si osserva che questo accade per $\omega < 12.5$.

Analiticamente:

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{49}{625} \frac{1+4\omega^2}{(1+\omega^2) \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\omega\right)^2 \right]} > \frac{1}{100}$$

Sviluppando si ottiene

$$\omega^6 - 33\omega^4 - 19009\omega^2 - 4275 < 0$$

Sostituendo $t = \omega^2$ e calcolando numericamente le radici di $t^3 - 33t^2 - 19009 - 4275$, si ottiene un'unica radice positiva $t_1 = 155.4559$ per cui la disuguaglianza è soddisfatta per $t \in (0, t_1)$ e quindi per $\omega < \sqrt{t_1} = 12.47$.

$$2.I) \begin{cases} -m_1 + 3 \frac{p_2}{1+p_2} = 0 \\ -m_2 + 2 \frac{p_1}{1+p_1} = 0 \\ -p_1 + m_1 = 0 \\ -p_2 + m_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = p_1 \\ m_2 = p_2 \\ m_1 = 3 \frac{m_2}{1+m_2} \\ m_2 = 2 \frac{m_1}{1+m_1} \end{cases}$$

$$m_1 = 3 \frac{2 \frac{m_1}{1+m_1}}{1 + 2 \frac{m_1}{1+m_1}}$$

$$m_1 = 3 \frac{2m_1}{1+3m_1}$$

$$3m_1^2 - 5m_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m_1 = 0 &\rightarrow m_2 = 0 \\ m_1 = \frac{5}{3} &\rightarrow m_2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Stati di equilibrio

$$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}_B = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/4 \\ 5/3 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

$$2. II) \quad J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{3}{(1+p_2)^2} \\ 0 & -1 & \frac{2}{(1+p_1)^2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J|_{x=\bar{x}_A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_A$$

$$\det(\lambda I - J_A) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 5$$

$\Rightarrow \bar{x}_A$ è instabile (per Cartesio)

$$J|_{x=\bar{x}_B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{16}{27} \\ 0 & -1 & \frac{9}{32} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_B$$

$$\det(\lambda I - J_B) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + \frac{5}{6}$$

Criterio di Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|cc}
 4 & 1 & 6 \\
 3 & 4 & 4 \\
 2 & 5 & 5/6 \\
 1 & 10 & \\
 & 3 & \\
 0 & 5 & \\
 & 6 &
 \end{array}$$

$\Rightarrow \bar{x}_B$ è asintoticamente stabile

3.I) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0 \\
 \lambda_{2,3} &= \pm j
 \end{aligned}$$

Modi: $1(t)$, $\cos(t)$, $\sin(t)$
 Sistema marginalmente stabile.

3.II) $\bar{x}: A\bar{x} = 0 \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

3.III) 2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Q = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sistema completamente raggiungibile, $x^k = \mathbb{R}^3$

b)

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema non completamente raggiungibile

$$X^r = L \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$c) B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sistema completamente raggiungibile, $X^r = \mathbb{R}^3$

Il sistema è stabilizzabile nei casi a) e c),
ma non nel caso b) poiché l'autovettore non
raggiungibile ha parte reale nulla

$$3. \text{IV}) \quad A + B_2 F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1 \ f_2 \ f_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ f_1 & f_2 - 2 & f_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A - B_2 F) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ -f_1 & 2-f_2 & \lambda-f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda [\lambda^2 - f_3 \lambda - 2f_2 + 4] + [-3\lambda + 3f_3 - 2f_1] =$$

$$= \lambda^3 - f_3 \lambda^2 + (1 - 2f_2) \lambda + 3f_3 - 2f_1 =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} -f_3 = 6 \\ 1 - 2f_2 = 11 \\ 3f_3 - 2f_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} -12 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -12x_1(t) - 5x_2(t) - 6x_3(t)$$

$$3.V) \quad y = x_1 \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sistema completamente osservabile

$$y = x_2 \quad C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } O = 2$$

$$X^{no} = \text{Ker } O = L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$y = x_3 \quad C = [0 \ 0 \ 1]$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Sistema completamente osservabile

4.I)

$$x_1(k+1) = (1-\alpha)x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \gamma x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = \alpha x_1(k) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = \beta x_2(k)$$

$$y(k) = (1-\gamma)x_3(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{1}{2} & \gamma \\ \alpha & \frac{1}{2}-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1-\gamma]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

4. II) $\bar{x} : (I-A)\bar{x} = 0$

$$I-A = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{1}{2} & -\gamma \\ -\alpha & \frac{1}{2}+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(I-A) = \frac{1}{2}\alpha + \alpha\beta - \frac{1}{2}\alpha - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta(1-\gamma)$$

3 cases: ① $\alpha=0$ ② $\beta=0$ ③ $\gamma=1$

① $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \gamma \\ 0 & \frac{1}{2}-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(I-A)$

Eigenvalues: $1, \frac{1}{2}-\beta, 0$

Systeme marginally stable $\left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right) \in \left[-0, \frac{1}{2}\right]\right)$

② $A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{1}{2} & \gamma \\ \alpha & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = L \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(I-A)$

Eigenvalues: $0, 1, \frac{1}{2}-\alpha$

Systeme marginally stable $\left(\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$

③ $\gamma=1$

$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{1}{2} & 1 \\ \alpha & \frac{1}{2}-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = L \begin{pmatrix} \frac{1+2\beta}{2\alpha} \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \ker(I-A)$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - (1-\alpha) & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\alpha & \lambda - (\frac{1}{2}-\beta) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - \left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta + \alpha\beta\right)\lambda - \alpha\beta =$$

$$= (\lambda - 1) \left[\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right)\lambda + \alpha\beta \right]$$

$$\lambda_1 = 1$$

Per valutare se gli altri due autovalori sono interni al cerchio unitario si può utilizzare la sostituzione $\lambda = \frac{1+s}{1-s}$ e applicare il criterio di Routh:

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right)\frac{1+s}{1-s} + \alpha\beta = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2} - \alpha - \beta + \alpha\beta\right)}_{c_2} s^2 + \underbrace{2(1 - \alpha\beta)}_{c_1} s + \underbrace{\frac{1}{2} + \alpha + \beta + \alpha\beta}_{c_0} = 0$$

Per $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ si ha $c_0 > 0$, $c_1 > 0$.

$c_2 > 0$ equivale a $\beta < \frac{\frac{3}{2} - \alpha}{1 - \alpha}$ che è sempre verificato per ogni $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Quindi anche in questo caso il sistema è marginalmente stabile.

[ALTERNATIVA; calcolare il modulo delle radici del polinomio per una griglia di valori di α e β , mediante un algoritmo numerico].

$$\begin{aligned}
 4. \text{IV}) \quad Y(z) &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} z - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & z & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\frac{3}{8}}{z \left(z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8} \right)} = \frac{\frac{3}{8}}{z \left(z - \frac{3}{4} \right) \left(z + \frac{1}{2} \right)} = \\
 &= -\frac{1}{z} + \frac{\frac{2}{5}}{z - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{3}{5}}{z + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$y(k) = -\delta(k-1) + \left[\frac{2}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right] \cdot \mathbb{1}(k-1)$$

La percentuale di seguelini che hanno superato il frequency all'istante $k=10$ è pari a $100 \cdot \sum_{k=0}^{10} y(k)$, che può essere calcolato numericamente ed è pari a circa il 91%.

$$5. \text{I}) \quad A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det(\lambda I - A) &= (\lambda - a)(\lambda - b) - (1-b)(1-a) = \\
 &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + (a+b-1) = \\
 &= (\lambda - 1)(\lambda + 1 - a - b)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = a + b - 1 \quad a, b \in (0, 1) \Rightarrow |\lambda_2| < 1$$

$\Rightarrow$ sistema marginalmente stabile.

5. II) Essendo il sistema marginalmente stabile si può applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (zI - A)^{-1} z x(0) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \frac{\begin{pmatrix} z-b & 1-a \\ 1-b & z-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}}{(\cancel{z-1})(z+1-a-b)} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}}{2-a-b} = \frac{(1-b)x_1(0) + (1-a)x_2(0)}{2-a-b} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

