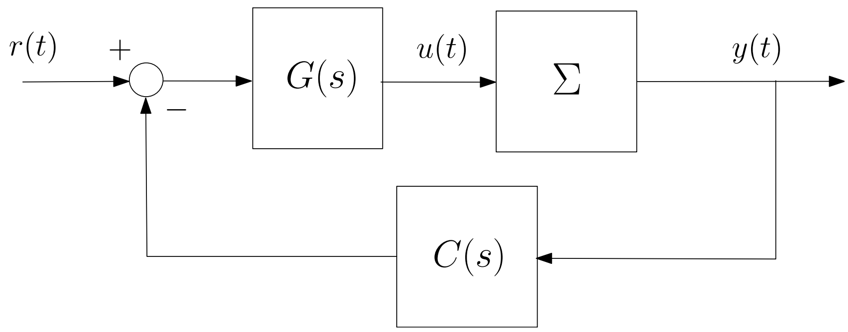
Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 26.11.2025

Candidato: ....

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo mostrato in figura:



dove

$$G(s) = \frac{K}{s}\ , \quad C(s) = \frac{1}{s+3}$$

e K è una costante reale. Il blocco Σ è descritto dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

I) Determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$.

II) Determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ i modi del sistema sono tutti convergenti.

III) Assumendo $K = 1$, determinare la risposta di regime permanente $y_P(t)$ relativa all'ingresso $r(t) = \sqrt{2}\cos(t)$.

Esercizio 2. Un modello semplificato per le previsioni del tempo si propone di descrivere l'evoluzione su base giornaliera delle probabilità che si verifichino i seguenti tre stati: soleggiato, nuvoloso, piovoso. Si assuma che:

- se un giorno è soleggiato, il giorno successivo c'è il 50% di probabilità che possa essere di nuovo soleggiato e il 50% che sia nuvoloso;
- se un giorno è nuvoloso, il giorno successivo può essere al 25% soleggiato, al 50% nuvoloso e al 25% piovoso;
- se un giorno è piovoso, il giorno successivo c'è il 25% di probabilità che possa essere di nuovo piovoso e il 75% che sia nuvoloso.

I) Assumendo che le variabili di stato $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ rappresentino le probabilità (comprese tra 0 e 1) che il giorno k sia rispettivamente soleggiato, nuvoloso e piovoso, determinare le equazioni della dinamica a tempo discreto delle variabili di stato e la corrispondente matrice A.

II) Determinare i modi del sistema e indicare se sono convergenti, limitati non convergenti, o divergenti.

III) Supponendo che il giorno $k = 0$ sia soleggiato, determinare qual è la probabilità di avere un giorno soleggiato nel lungo periodo (ovvero per $k \to +\infty$).

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo, descritto dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - \alpha x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

I) Calcolare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tutti i modi del sistema sono aperiodici e convergenti.

II) Assumendo $\alpha = \frac{7}{2}$, determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$, relativa all'ingresso a gradino unitario $u(t) = \mathbb{1}(t)$.

III) Assumendo $\alpha = \frac{7}{2}$, determinare per quali condizioni iniziali $x(0)$ la risposta libera nell'uscita $y_l(t)$ contiene solo il modo $e^{-3t} \cdot \mathbb{1}(t)$.

Esercizio 4. Si consideri un sistema lineare tempo-invariante a tempo discreto, avente ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$, la cui risposta forzata al gradino unitario (cioé all'ingresso $u(k) = \mathbb{1}(k)$) è pari a

$$y_f(k) = \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}\right)^k \right\} \mathbb{1}(k).$$

I) Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema.

II) Determinare la risposta impulsiva del sistema $y_{imp}(k)$.

III) Determinare un segnale di ingresso $u(k)$ tale per cui la corrispondente risposta forzata $y_f(k)$ sia tale per cui

$$\lim_{k \to +\infty} y_f(k) = 16.$$

RISULTATI

Esercizio 1.

I) $W(s) \quad =$

II) $K \quad :$

III) $y_P(t) \quad =$

Esercizio 2.

I) $A \quad =$

II) Modi $\quad :$

III) $\lim_{k\to+\infty} x_1(k) \quad =$

Esercizio 3.

I) α :

II) $y_f(t) =$

III) $x(0)$:

Esercizio 4.

I) Rappresentazione i/o :

II) $y_{imp}(k) =$

III) $u(k) =$