Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 13.1.2021

Istruzioni per lo svolgimento (leggere attentamente!)

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere inviato via email all'indirizzo `andrea.garulli@unisi.it`, **entro le ore 14.30 del 14 gennaio 2021**.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione del docente. È possibile inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento informatico per lo svolgimento del compito.
- Avendo molto tempo a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice per lo svolgimento di parti di esercizi, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui si trovano nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova.
- Nel caso due compiti presentino anche una piccola porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere molto tempo a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

A.G.

Esercizio 1. Un sistema dinamico lineare a tempo continuo è descritto dallo schema a blocchi rappresentato in Figura 1

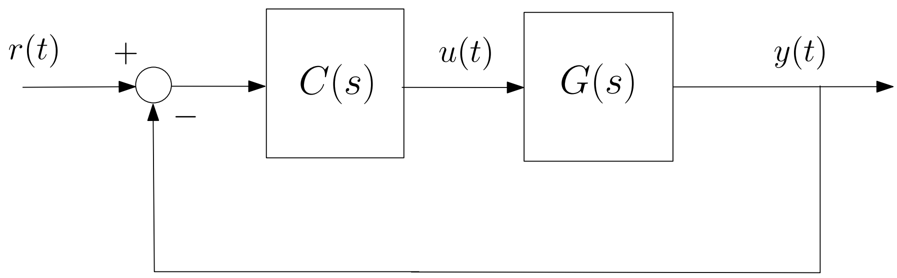

Figura 1.

dove

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 9}\ , \quad C(s) = K\frac{s + \frac{1}{2}}{s + p}$$

e K e p sono costanti reali.

I) Assumendo $K = 2$, determinare l'insieme dei valori di $p \in \mathbb{R}$ per cui il sistema risulta essere stabile in senso ILUL dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$.

II) Si assuma $p \geq 0$, $K > 0$ e si consideri l'ingresso a gradino unitario $r(t) = 1(t)$. Determinare il valore asintotico, per $t \to +\infty$, dell'errore di inseguimento $e(t) = y(t) - r(t)$, in funzione di p e K. Determinare per quali valori di $p \geq 0$ e $K > 0$ le seguenti condizioni sono soddisfatte:

   a) $\lim\limits_{t \to +\infty} e(t) < \dfrac{1}{100}$;

   b) $\lim\limits_{t \to +\infty} e(t) = 0$.

III) Assumendo $p = 2$ e $K = 14$, tracciare i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$. Oltre al diagramma effettivo, riportare quello asintotico, evidenziando punti di rottura e pendenze.
Determinare (eventualmente anche in maniera approssimata) l'intervallo dei valori di $\omega \in \mathbb{R}$ per cui l'ampiezza della risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa al segnale di ingresso $r(t) = M\cos(\omega t)$ risulta maggiore di $\dfrac{M}{10}$.

Esercizio 2. Un rete di regolazione genica può essere descritta dal sistema dinamico:

$$
\begin{aligned}
\dot{m}_1(t) &= -m_1(t) + 3\,\frac{p_2(t)}{1+p_2(t)} \\
\dot{m}_2(t) &= -m_2(t) + 2\,\frac{p_1(t)}{1+p_1(t)} \\
\dot{p}_1(t) &= -p_1(t) + m_1(t) \\
\dot{p}_2(t) &= -p_2(t) + m_2(t)
\end{aligned}
$$

in cui

- $m_i(t)$ rappresenta la concentrazione di mRNA dell'i-esimo gene;
- $p_i(t)$ rappresenta la concentrazione di proteina dell'i-esimo gene.

I) Determinare gli stati di equilibrio del sistema.

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto I).

Esercizio 3. Il modello linearizzato del moto di un satellite in orbita è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + 2x_3(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -2x_2(t) + u_2(t)\end{aligned}$$

dove i segnali di ingresso $u_1(t)$ e $u_2(t)$ corrispondono rispettivamente agli effetti dell'accelerazione radiale e tangenziale rispetto all'orbita.

I) Studiare la stabilità del sistema e riportarne i modi.

II) Assumendo $u_1(t) = u_2(t) = 0$, $\forall t$, determinare gli stati di equilibrio del sistema.

III) Studiare la raggiungibilità del sistema nei seguenti casi:

   a) si utilizzano entrambi gli ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$;
   b) si utilizza il solo ingresso $u_1(t)$;
   c) si utilizza il solo ingresso $u_2(t)$.

   Per ciascuno dei casi esaminati, riportare il sottospazio degli stati raggiungibili $\mathcal{X}^r$ e dire se il sistema è stabilizzabile mediante retroazione dello stato, giustificando la risposta.

IV) Sopponendo di poter utilizzare il solo ingresso $u_2(t)$, determinare, se possibile, una legge di controllo in retroazione dello stato, tale che il sistema ad anello chiuso risultante abbia come modi e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.

V) Supponendo di poter misurare tramite un sensore solo una delle variabili di stato (ovvero $y(t) = x_i(t)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$), determinare in quali dei tre casi il sistema risulta essere completamente osservabile. Negli altri casi, determinare il sottospazio degli stati non osservabili $\mathcal{X}^{no}$.

Esercizio 4. Una versione semplificata del gioco dell'oca consiste in sole tre caselle consecutive con le seguenti regole:

1. nella casella 1 c'è una probabilità α di avanzare alla casella 2 e una probabilità $1-\alpha$ di rimanere nella casella 1;
2. nella casella 2 c'è una probabilità $\frac{1}{2}$ di ritornare alla casella 1; una probabilità β di avanzare alla casella 3 e una probabilità $\frac{1}{2}-\beta$ di rimanere nella casella 2;
3. nella casella 3 c'è una probabilità γ di ritornare alla casella 1 e una probabilità $1-\gamma$ di superare il traguardo e completare così il percorso.

Si assumino $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,\frac{1}{2}]$ e $\gamma \in [0,1]$. Si indichino con $u(k)$ il numero di giocatori che iniziano il gioco, posizionando il proprio segnalino sulla prima casella nel turno $k+1$; con $x_i(k)$, $i=1,2,3$, il numero di segnalini presenti nella casella i-esima all'inizio del turno k; con $y(k)$ il numero di giocatori che oltrepassa il traguardo nel turno k.

I) Determinare la matrici A, B, C, D di un modello ingresso-stato-uscita che rappresenti l'evoluzione del gioco, ad ogni turno $k \in \mathbb{Z}$.

II) Assumendo $u(k)=0$, determinare per quali valori di $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,\frac{1}{2}]$, $\gamma \in [0,1]$, il sistema ha stati di equilibrio diversi dallo stato nullo. Riportare per ciascun caso gli stati di equilibrio ottenuti e studiare la stabilità del sistema.

III) Assumendo $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 0$, determinare la risposta impulsiva nell'uscita del sistema. Utilizzando il risultato ottenuto, progettare ed implementare un metodo per calcolare quale percentuale dei segnalini ha superato il traguardo a 10 turni dalla partenza.

Esercizio 5. Si consideri il sistema lineare a tempo-discreto descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= a\,x_1(k) + (1-a)\,x_2(k) \\ x_2(k+1) &= (1-b)\,x_1(k) + b\,x_2(k) \end{aligned}$$

dove a e b sono due costanti tali che $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.

I) Dimostrare che il sistema è marginalmente stabile per ogni coppia di valori $a, b \in (0,1)$.

II) Dimostrare che la risposta libera nello stato soddisfa la relazione

$$\lim_{k\to+\infty} x_1(k) = \lim_{k\to+\infty} x_2(k)$$

per ogni condizione iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^2$.