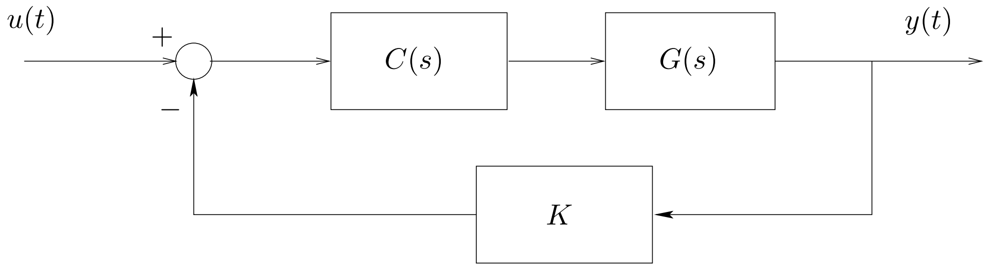
Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 25.11.2020

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo, avente ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, mostrato in figura:



dove $G(s) = \dfrac{10}{s(s+6)}$ e K è una costante reale.

I) Assumendo $C(s) = 1$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema risulta avere tutti i modi aperiodici e convergenti.

II) Assumendo $C(s) = \dfrac{1}{s+2}$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il valore di regime per $t \to +\infty$ della risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso a gradino unitario $u(t) = \mathbf{1}(t)$, esiste finito ed è minore di $\frac{1}{5}$.

III) Assumendo $K = 1$ e $C(s) = \dfrac{1}{s+p}$, con $p \in \mathbb{R}$, determinare il valore di p in modo che uno dei modi del sistema sia $e^{-t}\,\mathbf{1}(t)$. Riportare anche gli altri modi del sistema.

Esercizio 2. Si consideri una catena di distribuzione di elettrodomestici costituita da un produttore e da un venditore. Si indichino con $x_1(k)$ e $x_2(k)$ i pezzi presenti in magazzino nel mese k, rispettivamente presso il produttore e il venditore. Durante il mese k, il produttore acquista materiali sufficienti a produrre una quantità di pezzi $u(k)$ che saranno disponibili in magazzino il mese successivo. Una frazione α dei pezzi presenti nel magazzino del produttore nel mese k, vengono messi a disposizione del venditore nel mese successivo. Per contro, ogni mese il venditore restituisce al produttore una frazione β dei prodotti che ha in magazzino, perché risultati difettosi. Il produttore ripara i pezzi in questione, che sono quindi di nuovo disponibili nel suo magazzino il mese successivo. Il venditore vende ogni mese $y(k)$ elettrodomestici, pari ad una frazione γ dei pezzi che ha in magazzino.
Si assuma: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{8}$, $\gamma = \frac{3}{8}$.

I) Determinare un modello ingresso-stato-uscita della catena di distribuzione, che descriva l'evoluzione mensile dei pezzi presenti nei due magazzini e degli elettrodomestici venduti. Riportare le matrici A, B, C, D del modello.

II) Determinare i modi del sistema e dire se sono convergenti, limitati non convergenti o divergenti.

III) Si assuma che nel mese $k = 0$ i magazzini siano vuoti e vengano prodotti $u(0) = N$ pezzi, mentre nei mesi successivi la produzione si fermi. Determinare il valore minimo di N, in modo che al mese $k = 3$ vengano venduti almeno 15 elettrodomestici.

Esercizio 3. Si consideri un sistema lineare a tempo discreto, avente ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$, la cui risposta impulsiva è data dal segnale:

$$g(k) = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \mathbf{1}(k).$$

I) Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema.

II) Determinare le condizioni iniziali $y(-1)$, $y(-2)$ in modo tale che la risposta libera del sistema converga a zero, ovvero $\lim_{k \to +\infty} y_l(k) = 0$.

III) Si assuma ora che l'uscita del sistema $y(k)$ sia posta in ingresso ad un altro sistema lineare, avente funzione di trasferimento $P(z)$ e uscita $w(k)$. Determinare $P(z)$ in modo che la risposta forzata del sistema complessivo avente ingresso $u(k)$ e uscita $w(k)$, relativa all'ingresso a gradino unitario $u(k) = \mathbf{1}(k)$, risulti essere

$$w_f(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \mathbf{1}(k-1).$$

Riportare la risposta impulsiva del sistema avente funzione di trasferimento $P(z)$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -3\,x_1(t) + 6\,x_3(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + 5\,u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

I) Determinare i modi della risposta libera del sistema e per ciascuno di essi indicare se sono: a) aperiodici o pseudoperiodici; b) convergenti, limitati non convergenti o divergenti.

II) Determinare la risposta impulsiva nell'uscita $y_{imp}(t)$.

III) Supponendo di applicare il segnale di ingresso $u(t) = M\,\cos(t)\,\mathbf{1}(t)$, determinare per quali valori di $M \in \mathbb{R}$ la risposta di regime permanente risulta avere ampiezza maggiore di 1.