Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 27.11.2018

Candidato: .... **Corso di Laurea** ....

Esercizio 1. Si consideri un sistema lineare a tempo discreto, descritto dall'equazione ingresso-uscita

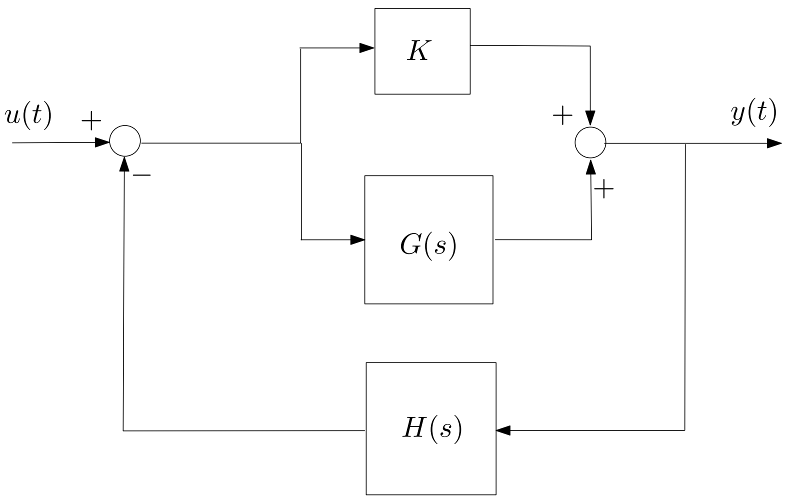
$$y(k+3) - \frac{1}{4}\, y(k+1) = u(k)$$

I) Assumendo come variabili di stato $x_1(k) = y(k)$, $x_2(k) = y(k+1)$, $x_3(k) = y(k+2)$, determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.

II) Determinare lo stato iniziale $x(0)$ in modo tale che la corrispondente risposta libera nell'uscita risulti essere uguale a $y_l(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot 1(k-1)$.

III) Calcolare la risposta impulsiva nell'uscita $y_{imp}(k)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo mostrato in figura:



dove K è una costante reale, e

$$G(s) = \frac{12}{s-2}\ , \quad H(s) = \frac{1}{s}.$$

I) Determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, in funzione di K.

II) Determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ i modi della risposta impulsiva del sistema sono tutti convergenti.

III) Assumendo $K = 4$, determinare per quali valori di $\omega \geq 0$, la risposta di regime permanente relativa all'ingresso $u(t) = \cos(\omega t)$ risulta avere ampiezza pari a $2\sqrt{5}$.

Esercizio 3. Una piccola repubblica indipendente è organizzata amministrativamente in due macroregioni. Ogni anno il 10% degli abitanti della regione 1 si trasferisce nella regione 2, e la stessa percentuale degli abitanti della regione 2 si trasferisce nella regione 1. Inoltre, ogni anno il 10% degli abitanti di ciascuna regione emigra all'estero. Per quanto riguarda l'immigrazione dall'estero, gli immigrati si dirigono totalmente nella regione 1 (di fatto, l'immigrazione nella regione 2 può essere trascurata).

I) Determinare un modello ingresso-stato-uscita del sistema, nel quale: $u(k)$ rappresenta la quantità di immigrati che si stabiliscono nella regione 1 nell'anno $k+1$; $x_1(k)$ e $x_2(k)$ sono la popolazione nell'anno k, rispettivamente nella regione 1 e nella regione 2; l'uscita $y(k)$ rappresenta la popolazione totale della repubblica nell'anno k.

II) Supponendo che nell'anno $k = 0$ vivano nella repubblica 5 milioni di abitanti, divisi equamente tra le due regioni, determinare l'evoluzione nel tempo della popolazione totale $y(k)$ in assenza di immigrazione.

III) Supponendo ora che vi sia un'immigrazione costante nella regione 1 nel corso degli anni, determinare la percentuale di popolazione che si stabilisce nelle due regioni a regime (ovvero dopo che è trascorso un numero di anni molto elevato).

Esercizio 4. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dal modello ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -6x_2(t) - 4x_3(t) + 4u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

I) Determinare i modi della risposta libera del sistema e per ciascuno di essi indicare se sono: a) aperiodici o pseudoperiodici; b) convergenti, limitati non convergenti o divergenti.

II) Determinare la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$ relativa all'ingresso a gradino unitario $u(t) = 1(t)$.

III) Supponendo di applicare il segnale di ingresso

$$u(t) = \left(e^{-t} - K\, e^{-2t}\right) \cdot 1(t)$$

determinare per quale valore di $K \in \mathbb{R}$ la corrispondente risposta forzata nell'uscita soddisfi la condizione $\lim_{t\to+\infty} y_f(t) = 0$.