Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 16.1.2017

Candidato: .... **Corso di Laurea** ....

Istruzioni per lo svolgimento (leggere attentamente!)

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere riconsegnato alle ore 14.00 del 17 gennaio 2017, in aula 145, oppure inviato via email a `garulli@ing.unisi.it`.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione del docente, che sarà presente saltuariamente nel lab 143 durante il pomeriggio del 16/1 e nel lab 146 la mattina del 17/1 per eventuali richieste di chiarimento. È possibile anche inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento informatico per lo svolgimento del compito. Coloro che lo desiderano, possono usare le postazioni dei lab 143 e 146, rispettivamente nel pomeriggio del 16/1 e la mattina del 17/1.
- Avendo 24 ore a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui sono date nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova. Al termine, riconsegnare sia il testo che lo svolgimento, riportando il proprio nome e cognome su tutti i fogli.
- Nel caso due compiti presentino anche una piccola porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere 24 ore a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

A.G.

Esercizio 1. Un sistema dinamico a tempo continuo è costitutito dalla interconnessione rappresentata in Figura 1.

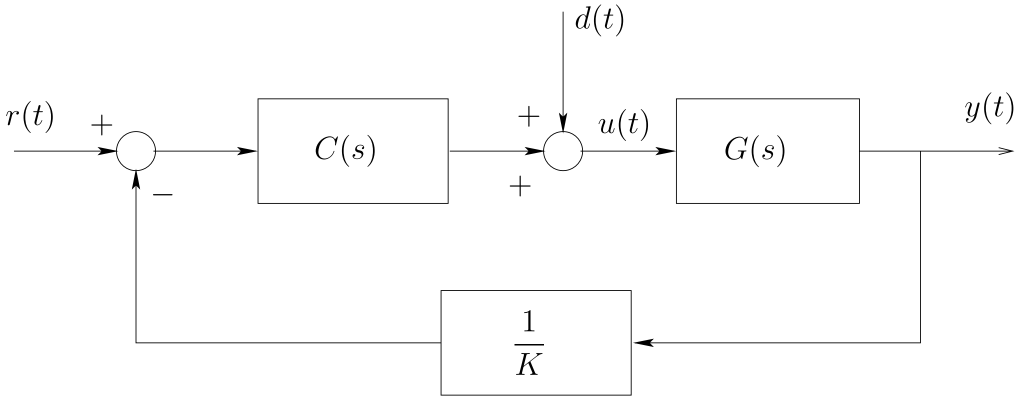

Figura 1.

in cui K è una costante reale e

$$C(s) = \frac{1}{s}\ , \quad G(s) = \frac{20(1-s)}{s^2+2s+100}.$$

I) Tracciare i diagrammi di Bode della funzione $C(s)G(s)$. Riportare sia i diagrammi esatti che quelli asintotici, indicando i punti di rottura, le pendenze e i valori della fase.

II) Determinare le funzioni di trasferimento:

a) $W(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$;

b) $D(s)$ dall'ingresso $d(t)$ all'uscita $y(t)$;

c) $Q(s)$ dall'ingresso $r(t)$ al segnale $u(t)$.

III) Determinare per quali valori di K le funzioni di trasferimento calcolate al punto II) sono stabili in senso ILUL.

IV) Determinare per quali valori di K il guadagno stazionario (o guadagno "in continua") della funzione di trasferimento $Q(s)$ risulta essere finito e minore di 10. È possibile scegliere K in modo che in corrispondenza di un ingresso a gradino unitario $r(t) = 1(t)$, il valore asintotico di $u(t)$ per $t \to +\infty$ sia al massimo il doppio del valore asintotico di $y(t)$? Giustificare la risposta.

V) Supponendo che i segnali di ingresso $r(t)$ e $d(t)$ siano sinusoidi di pulsazione ω e ampiezza unitaria, determinare per quali valori di ω risulti essere maggiore l'ampiezza della risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa alle sinusoidi in $r(t)$, e per quali invece risulti maggiore l'ampiezza di quella relativa alle sinusoidi in $d(t)$.

Esercizio 2. Un sistema dinamico a tempo discreto è descritto dall'equazione ingresso-uscita:

$$y(k) - \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{1}{3}y(k-2) - \frac{1}{6}y(k-3) = u(k-1)$$

I) Determinare le matrici A, B, C, D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.

II) Studiare la stabilità del sistema in senso ILUL.

III) Determinare per quali condizioni iniziali, la risposta libera nell'uscita del sistema converge a zero.

IV) Determinare il segnale di ingresso $u(k)$ in modo che la corrispondente risposta forzata risulti uguale alla rampa lineare, ovvero $y_f(k) = k \cdot 1(k)$.

V) Progettare un sistema in grado di generare il segnale $u(k)$, in modo tale da garantire $y(k) = 0$ per ogni $k \geq 3$, qualunque siano le condizioni iniziali del sistema.

Esercizio 3. Il modello SIR (S=Suscettibili, I=Infetti, R=rimossi) è largamente impiegato in epidemiologia per descrivere la diffusione di alcune tra le più comuni malattie infettive. Indicando con $x_1(t)$ il numero di individui suscettibili di contagio al tempo t, con $x_2(t)$ il numero degli infetti e con $x_3(t)$ il numero dei rimossi (ovvero coloro che risultano immuni al contagio), le equazioni del modello sono

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \beta x_1(t)x_2(t) - (\alpha+\gamma)x_2(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \gamma x_2(t) - \alpha x_3(t)
\end{aligned}$$

dove α è il tasso di mortalità dell'intera popolazione, β il coefficiente di contagio, γ il tasso di guarigione e $u(t)$ rappresenta il tasso di natalità della popolazione al tempo t (si assumano α, β, γ costanti positive).

I) Assumendo un tasso di natalità costante nel tempo, $u(t) = K$, determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di α, β, γ e K.

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto I), al variare di K (espresso in funzione di α, β e γ).

III) Si assuma ora $u(t) = 0$ e $\alpha = 0$. Dimostrare che:

   a) $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ è costante per ogni t;

   b) tra $x_1(t)$ e $x_3(t)$ vale la relazione:

$$x_1(t) = x_1(0)\, e^{-\frac{\beta}{\gamma}\{x_3(t) - x_3(0)\}}.$$

Esercizio 4. Un porzione di rete stradale di una città è descritta dal grafo in Figura 2, in cui i nodi rappresentano alcuni luoghi caratteristici del centro storico, e gli archi le strade che li collegano. Le frecce degli archi indicando il senso di percorrenza delle strade.

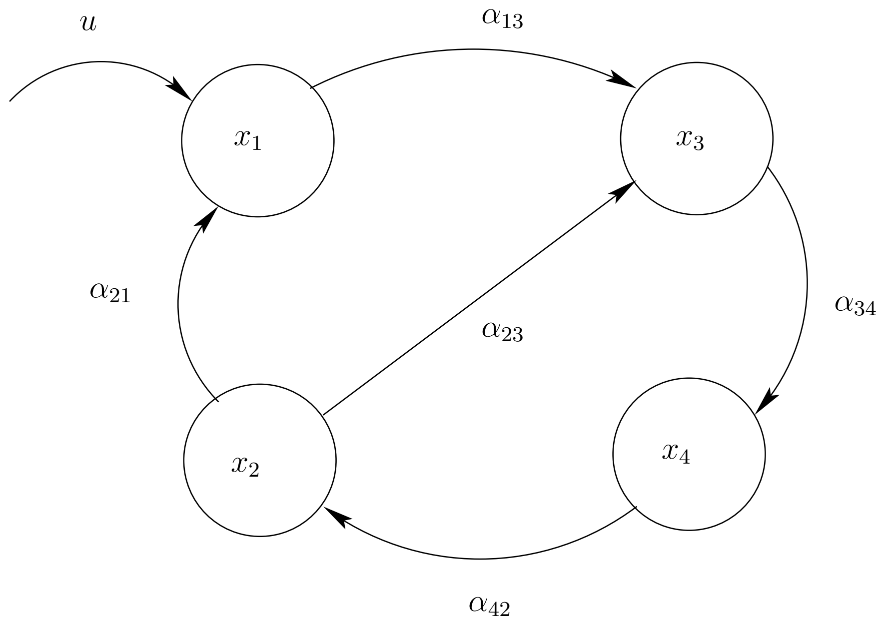

Figura 2.

Si vuole costruire un modello a tempo discreto in cui le variabili di stato $x_i(k)$, per $i = 1, \ldots, 4$, rappresentano il quantitativo di veicoli presenti nel nodo i-esimo al tempo k. Si assume che al tempo $k+1$, una quantità di veicoli pari a $\alpha_{ij}x_i(k)$ si sia spostata dal nodo i-esimo al nodo j-esimo (naturalmente $\alpha_{ij} = 0$ se non c'è un arco che va dal nodo i-esimo al nodo j-esimo). In altre parole, α_{ij} rappresenta la frazione di veicoli che si trasferiscono dal nodo i-esimo al nodo j-esimo tra due istanti di tempo discreti successivi. Si assume inoltre che $u(k)$ veicoli entrino nel nodo 1 all'istante $k+1$.

I) Scegliendo come uscita del modello $y(k) = x_1(k)$, determinare le equazioni del modello ingresso-stato-uscita del sistema e le corrispondenti matrici A, B, C, D.

II) Studiare la raggiungibilità del sistema. Determinare per quali valori dei parametri α_{ij} il sistema non è completamente raggiungibile. Giustificare il risultato ottenuto con argomentazioni qualitative legate alla struttura della rete stradale.

III) Assumendo $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$ per ogni coppia i, j per la quale $\alpha_{ij} \neq 0$, determinare i modi del sistema. Supponendo $u(k) = 0$ per ogni k, determinare la frazione di veicoli che si viene a trovare dopo un tempo sufficientemente lungo in ciascuno dei nodi della rete. [Si assuma per semplicità che tutti i veicoli siano inizialmente concentrati in uno dei nodi della rete... anche se non è necessario!].

IV) Assumendo $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}$ per ogni coppia i, j per la quale $\alpha_{ij} \neq 0$, studiare l'osservabilità del sistema. Determinare la matrice L di un osservatore asintotico dello stato ad anello chiuso, in grado di fornire una stima dello stato $\hat{x}(k)$ tale che $x(k) - \hat{x}(k) = 0$, per ogni $k \geq 4$.

Esercizio 5. Si consideri il sistema a tempo continuo, descritto dalle equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= |x_2(t)|\end{aligned}$$

I) Determinare la risposta libera del sistema $x_l(t)$, relativa ad una generica condizione iniziale $x(0)$ [Attenzione al valore assoluto!].

II) Utilizzando la definizione di stabilità di uno stato di equilibrio, dimostrare che tutti gli stati di equilibrio del sistema sono instabili.