Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 13.1.2016

Candidato: .... **Corso di Laurea** ....

Istruzioni per lo svolgimento

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere riconsegnato alle ore 14.00 del 14 gennaio 2016, in aula 145.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione del sottoscritto e dei due assistenti Farina e Pepe. Saremo presenti nel lab 124 durante il pomeriggio del 13/1 e nel lab 143 la mattina del 14/1 per eventuali richieste di chiarimento. È possibile anche inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento informatico per lo svolgimento del compito. Coloro che lo desiderano, possono usare le postazioni dei lab 124 e 143, rispettivamente nel pomeriggio del 13/1 e la mattina del 14/1.
- Avendo 24 ore a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui sono date nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova. Al termine, riconsegnare sia il testo che lo svolgimento, riportando il proprio nome e cognome su tutti i fogli.
- Nel caso due compiti presentino anche una piccola porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere 24 ore a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

A.G.

Esercizio 1. Un magazzino ha un tempo di latenza minimo di due giorni. Supponendo di indicare con $m(k)$ le merci che entrano nel giorno k e con $v(k)$ quelle che vengono avviate alla spedizione nel giorno k, l'evoluzione del quantitativo di merci $y(k)$ presenti in magazzino nel giorno k può essere descritto dal sistema dinamico

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) - v(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= m(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{aligned}$$

I) Determinare le matrici A, B, C, D del modello ingresso-stato-uscita, considerando come ingresso il vettore

$$u(k) = \begin{bmatrix} m(k) \\ v(k) \end{bmatrix}.$$

II) Assumendo che nel giorno $k = 0$ siano presenti nel magazzino 100 pezzi tutti arrivati da almeno due giorni (che corrisponde alla condizione iniziale $x(0) = [100 \quad 0 \quad 0]'$) e che successivamente non arrivino altre merci nel magazzino, determinare la sequenza di merci in spedizione $v(k)$ tale per cui il quantitativo di merci presenti in magazzino $y(k)$ si dimezzi giorno per giorno.

III) Determinare il minimo numero di passi T in cui il sistema è completamente raggiungibile. Per tale numero di passi, calcolare le sequenze di ingressi vettoriali $u(k)$ in grado di portare il sistema dalla condizione iniziale $x(0) = [200 \quad 30 \quad 40]'$ allo stato $x(T) = [50 \quad 50 \quad 50]'$.

IV) Ripetere l'esercizio precedente assumendo che in ogni giorno non possano uscire dal magazzino più di 30 pezzi, ovvero $v(k) \leq 30$. [Suggerimento: ragionare sulla struttura della matrice di raggiungibilità in T passi].

V) Studiare l'osservabilità del sistema. Ripetere l'esercizio assumendo che l'uscita coincida con lo stato $x_2(k)$ oppure con $x_3(k)$. Nei casi in cui il sistema non risulti completamente osservabile, determinare se sia possibile costruire un osservatore asintotico dello stato, motivando la risposta.

VI) Alla luce dello studio delle proprietà strutturali e delle equazioni del sistema, commentare il significato delle tre variabili di stato $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$.

Esercizio 2. Il comportamento dinamico di un motore elettrico è descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
&J\ddot{\theta}(t) + \beta\dot{\theta}(t) = \tau(t)\\
&\tau(t) = Kc(t)\\
&L\dot{c}(t) + Rc(t) = v(t) - K\dot{\theta}(t)
\end{aligned}
$$

in cui le variabili rappresentano le seguenti grandezze fisiche

- $\theta(t)$: posizione angolare dell'albero motore;
- $\tau(t)$: coppia fornita all'albero motore;
- $c(t)$: corrente che fluisce nel circuito di alimentazione;
- $v(t)$: tensione in ingresso al circuito di alimentazione.

I valori dei parametri sono: $J = 1$, $\beta = 2$, $R = 4$, $L = 2$.

I) Assumendo come ingresso $u(t) = v(t)$ e come uscita $y(t) = \theta(t)$, determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.

II) Studiare la stabilità del sistema in funzione di K.

III) Determinare la funzioni di trasferimento $G(s)$ del sistema. Studiare la stabilità in senso ILUL in funzione di K, giustificando la risposta con un esempio quantitativo.

IV) Assumendo $K = 8$, determinare i diagrammi di Bode della funzione $G(s)$ [Riportare sia i diagrammi esatti che quelli asintotici, indicando i punti di rottura, le pendenze e i valori della fase].

V) Determinare per quali valori di K la risposta di regime permanente nell'uscita $y(t)$ relativa all'ingresso $v(t) = \cos(\omega t)$ risulta avere ampiezza maggiore di -20 dB, per ogni ω compreso tra 0 e 1. Giustificare la risposta, spiegando in dettaglio il procedimento seguito.

Esercizio 3. Un sistema dinamico a tempo continuo è costitutito dalla interconnessione rappresentata in Figura 1.

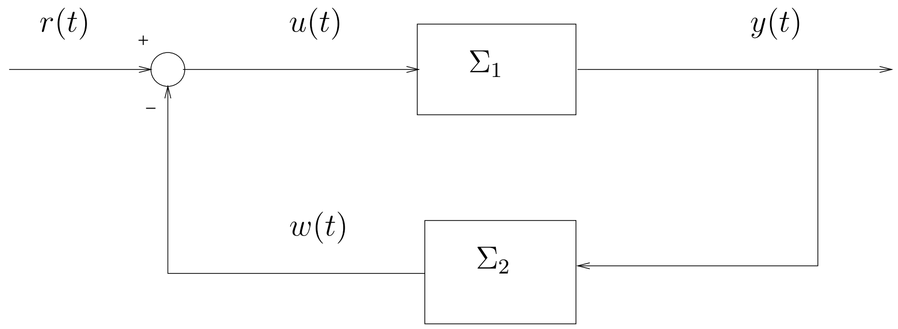

Figura 1.

I due blocchi Σ_1 e Σ_2 sono descritti dalle seguenti equazioni

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -b_0 x_3(t) - b_1 x_4(t) + y(t) \\ w(t) &= x_3(t) \end{cases}$$

dove a_0, a_1, b_0, b_1 sono parametri reali.

I) Determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita complessiva del sistema avente come ingresso $r(t)$ e come uscita $y(t)$.

II) Determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema avente come ingresso $r(t)$ e come uscita $y(t)$.

III) Dimostrare che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile, qualunque sia il valore assunto dai parametri a_0, a_1, b_0, b_1.

IV) Assumendo i valori $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = K$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema avente come ingresso $r(t)$ e come uscita $y(t)$ risulta essere stabile in senso ILUL. Riportare i modi del sistema nel caso $K = 2$.

V) [Facoltativo]. Utilizzando una procedura numerica, determinare per quali valori di K compresi tra 0 e 10, il sistema presenta solo modi pseudoperiodici convergenti. Riportare sinteticamente la procedura utilizzata.

Esercizio 4. Nel 1963, Edward Lorenz sviluppò il seguente modello matematico del fenomeno della *convezione atmosferica*:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_3(t) + \alpha x_1(t) - x_2(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t)
\end{aligned}$$

dove α e β sono parametri reali, con $\beta > 0$.

I) Determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di α e β .

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto I), in funzione di α e β .

Esercizio 5. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto del secondo ordine Σ, descritto dall'equazione

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

dove $x(k) \in \mathbb{R}^2$. Il quadrato

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1 \right\}$$

si dice *invariante* rispetto al sistema Σ, se $x(0) \in S$ implica che anche $x(k) \in S$ per ogni $k > 0$.

I) Si consideri la seguente affermazione: "Se gli autovalori di A sono reali e in valore assoluto minori di 1, allora S è invariante rispetto al sistema Σ". Dimostrare che l'affermazione è falsa trovando un opportuno controesempio.

II) Determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché S sia invariante rispetto al sistema Σ. Nel caso in cui non si riesca a trovare tale condizione, determinare almeno una condizione solo sufficiente.