**Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 14.1.2015**

**Candidato**: ........................................................ **Corso di Laurea** ..............................................

**Istruzioni per lo svolgimento**

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere riconsegnato alle ore 11.00 del 15 gennaio 2015, in aula 145.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione del sottoscritto. Sarò presente in laboratorio 124 durante il pomeriggio del 14 gennaio per eventuali richieste di chiarimento. È possibile anche inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento informatico per lo svolgimento del compito. Coloro che lo desiderano, possono usare le postazioni del laboratorio 124 durante il pomeriggio del 14 gennaio.
- Avendo 24 ore a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui sono date nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova. Al termine, riconsegnare sia il testo che lo svolgimento, riportando il proprio nome e cognome su tutti i fogli.
- Nel caso due compiti presentino anche una porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere 24 ore a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

A.G.

**Esercizio 1**. In questo esercizio, si vuole determinare un modello matematico di una versione semplificata del gioco dell'oca. Il tabellone, composto da 4 caselle, è rappresentato in Figura 1(a).
Il dado utilizzato ha solo due possibili risultati: 1 e 2 (entrambi con probabilità pari a $\frac{1}{2}$). Ne consegue che le probabilità di passare da una casella all'altra sono quelle riportate nel grafo in Figura 1(b).

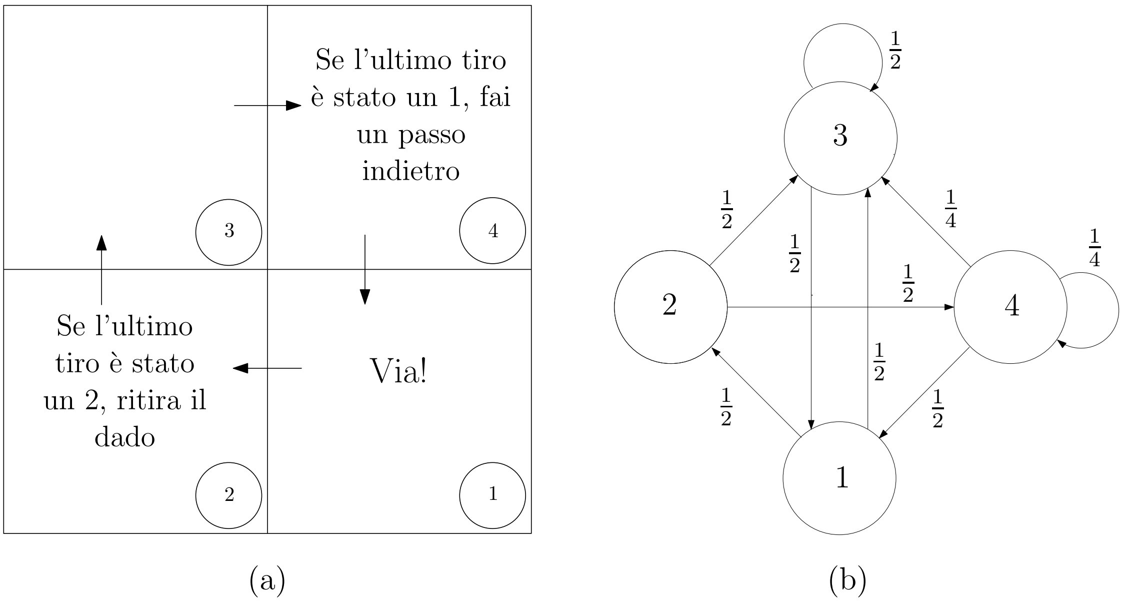


Figura 1.

I) Determinare un modello in rappresentazione di stato, a tempo discreto, della dinamica del sistema in esame, assumendo come variabili di stato $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, 4$, le probabilità di trovarsi nella casella $i$-esima, dopo il $k$-esimo tiro del dado.

II) Determinare i modi della risposta libera e studiare la stabilità interna del sistema.

III) Assumendo che all'inizio del gioco (cioè per $k = 0$) ci si trovi nella casella 1, determinare la probabilità di trovarsi in ciascuna casella del gioco, quando il numero di lanci del dado tende all'infinito.

IV) Dimostrare che le probabilità calcolate al punto III), non dipendono dalla casella in cui ci si trova all'inizio del gioco.

**Esercizio 2**. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in Figura 2, in cui

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}\ , \quad H(s) = \frac{s}{s+3}\ , \quad C(s) = \frac{1}{s+1}$$

e $K$ è una costante reale.

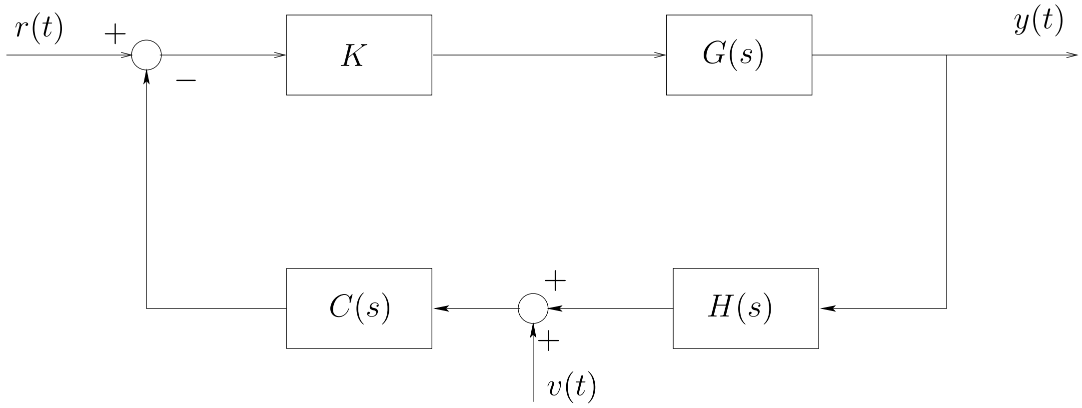


Figura 2.

I) Determinare le funzioni di trasferimento:

- $W_1(s)$, dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$;
- $W_2(s)$, dall'ingresso $v(t)$ all'uscita $y(t)$;

in funzione di $K$.

II) Assumendo $v(t) = 0$, $\forall t$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ la risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso impulsivo $r(t) = \delta(t)$, tende per $t \to +\infty$ ad un valore finito compreso tra 0 e 2.

III) Assumendo $K = 6$, determinare i diagrammi di Bode della funzione $W_1(s)$ [Riportare sia i diagrammi esatti che quelli asintotici, indicando i punti di rottura, le pendenze e i valori della fase].

IV) Assumendo $r(t) = 0$, $\forall t$, determinare per quali valori di $K$ la risposta di regime permanente nell'uscita $y(t)$ relativa all'ingresso $v(t) = \cos(t)$ risulta essere definita ed avere ampiezza minore di 1.

**Esercizio 3**. La rete idrica di una regione può essere rappresentata schematicamente dal grafo mostrato in Figura 3.

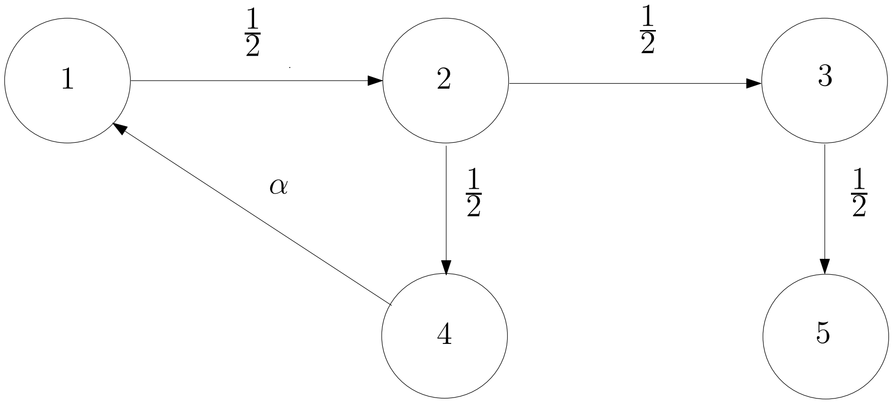


Figura 3.

Ogni nodo del grafo rappresenta un serbatoio per la raccolta dell'acqua. La variabile di stato $x_i(k)$ rappresenta la quantità di acqua presente nel serbatoio del nodo $i$-esimo all'istante $k$. La quantità di acqua che esce da ciascun serbatoio (nel verso indicato dalle frecce) nell'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante $k$ e il successivo istante $k+1$, è proporzionale alla quantità di acqua presente nel serbatoio all'istante $k$, secondo il coefficiente riportato sulla freccia corrispondente. Ad esempio, nel serbatoio 2 entra all'istante $k+1$ una quantità di acqua pari a $\frac{1}{2}\,x_1(k)$. Allo stesso tempo, dal serbatoio 2 esce una quantità d'acqua pari a $\frac{1}{2}\,x_2(k)$ verso il serbatoio 3, ed una quantità d'acqua pari a $\frac{1}{2}\,x_2(k)$ verso il serbatoio 4.
Il parametro $\alpha$ è un numero reale compreso tra 0 e 1 (per cui, $\alpha\, x_4(k)$ è la quantità d'acqua che all'istante $k+1$ giunge al serbatoio 1, dal serbatoio 4).

I) Determinare un modello a tempo discreto, in equazioni di stato, che rappresenti l'evoluzione dell'acqua all'interno dei serbatoi.

II) Supponendo di immettere una quantità di acqua $u(k)$ all'istante $k$, nel serbatoio 1, deteminare per quali valori di $\alpha$ il sistema risulta non essere completamente raggiungibile. Per tali valori, determinare il sottospazio degli stati raggiungibili.

III) Ripetere l'esercizio al punto II), supponendo di immettere la quantità di acqua $u(k)$ nel serbatoio 3. Giustificare la risposta in base alla struttura della rete idrica.

IV) Si assuma ora $\alpha = \frac{1}{2}$. Supponendo di poter misurare ad ogni istante $k$ la quantità di acqua presente in uno solo dei cinque serbatoi, scegliere il serbatoio in cui effettuare la misura in modo che il sistema risulti essere completamente osservabile. Giustificare la risposta sia con argomenti quantitativi, che in base alla struttura della rete idrica.

V) [Facoltativo]. Utilizzando MATLAB, determinare per quali valori di $\alpha \in [0, 1]$ il sistema non presenta modi pseudoperiodici. Riportare sinteticamente la procedura utilizzata.

**Esercizio 4**. Due specie animali presenti all'interno dello stesso ecosistema interagiscono tra loro secondo il modello di Lotke-Volterra. Si tratta di un sistema dinamico a tempo continuo, in cui le variabili di stato rappresentano l'evoluzione temporale degli individui delle singole specie:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) - \alpha x_1(t)x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -3x_2(t) + \alpha x_1(t)x_2(t) - \beta x_2^2(t)\end{aligned}$$

dove $\alpha$ e $\beta$ sono parametri reali.

I) Assumendo $u(t) = 0$, $\forall t$, determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di $\alpha$ e $\beta$ .

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto I), in funzione di $\alpha$ e $\beta$ .

III) Si ponga ora $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ e si assuma $u(t) = 8\,x_2(t)$ (una politica di ripopolazione della prima specie, proporzionale alla numerosità della seconda). Determinare come si modificano gli stati di equilibrio calcolati al punto I), e studiarne la stabilità.

**Esercizio 5**. Si consideri il sistema lineare scalare, a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = a\,x(t)$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}$ e $a$ è un parametro reale. Dimostrare le seguenti affermazioni, utilizzando le definizioni formali di convergenza, stabilità e stabilità asintotica globale:

I) Se $\bar{x} = 0$ è uno stato di equilibrio convergente, allora è anche stabile.

II) Se $\bar{x} = 0$ è uno stato di equilibrio convergente, allora è anche globalmente asintoticamente stabile.