Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 14.1.2014

Candidato: .... **Corso di Laurea** ....

Istruzioni per lo svolgimento

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere riconsegnato alle ore 11.00 del 15 gennaio 2013, in aula 145.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione del sottoscritto. Sarò presente in laboratorio 124 durante il pomeriggio del 15 gennaio per eventuali richieste di chiarimento. È possibile anche inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento informatico per lo svolgimento del compito.
- Avendo 24 ore a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui sono date nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova. Al termine, riconsegnare sia il testo che lo svolgimento, riportando il proprio nome e cognome su tutti i fogli.
- Nel caso due compiti presentino anche una porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere 24 ore a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

A.G.

Esercizio 1. Si consideri un modello dell'economia di uno stato, in cui le variabili di stato $x_i(k)$ rappresentano il volume di affari in euro del settore economico i-esimo nell'anno k, prima della tassazione. Il governo tassa le attività del settore i-esimo con un'aliquota pari a r_i. Si supponga che lo stato decida di investire una cifra complessiva pari a $u(k)$ nell'anno k-esimo nei vari settori economici. Indicando con s_i la proporzione dell'investimento nel settore i-esimo e con $\bar{x}_i(k)$ il volume del settore i-esimo dopo l'effetto della tassazione e degli investimenti, si ha

$$\bar{x}_i(k) = x_i(k) - r_i x_i(k) + s_i u(k) \quad , \quad i = 1, \dots, n.$$

Le attività economiche si propagano da un anno a quello successivo, interagendo tra loro secondo la dinamica

$$x(k+1) = E\bar{x}(k)$$

che esprime il volume degli affari *prima* della tassazione e degli investimenti nell'anno $k+1$ in funzione del volume *dopo* la tassazione e gli investimenti nell'anno k, dove E è un'opportuna matrice $n \times n$.

I) Supponendo di considerare un modello con $n = 3$ settori economici e i seguenti parametri:

$$s = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

determinare le matrici A e B delle equazioni di stato $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ del sistema, nei seguenti casi

a) non è presente tassazione, ovvero $r = 0$;

b) le aliquote di tassazione sono date dal vettore

$$r = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

II) Determinare i modi della risposta libera e studiare la stabilità interna del sistema, nei casi a) e b) descritti al punto I).

III) Si supponga ora che il governo decida di investire ogni anno una cifra pari all'intero ricavato della tassazione, ovvero $u(k) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i(k) = r^T x(k)$. Determinare come si modificano i modi del sistema nei casi a) e b).

IV) Definendo l'ammontare complessivo dell'economia dello stato come la somma dei vari settori

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} x_i(k)$$

determinare se, nelle condizioni del punto III), il tasso di crescita di $y(k)$ risulta essere maggiore nel caso a) o nel caso b) (cioè con o senza tassazione). Giustificare la risposta utilizzando argomenti qualitativi derivanti dall'analisi della risposta libera del sistema dinamico in esame.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in Figura 1, in cui

$$G_1(s) = \frac{17}{s}\ , \quad G_2(s) = \frac{s+1}{s^2+4s-13}$$

e K è una costante reale.

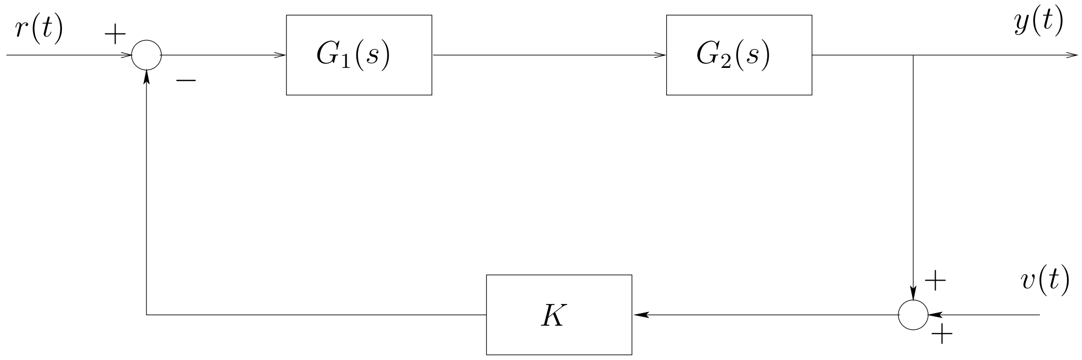

Figura 1.

I) Determinare le funzioni di trasferimento:

- $W_1(s)$, dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$;
- $W_2(s)$, dall'ingresso $v(t)$ all'uscita $y(t)$;

in funzione di K.

II) Determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ le funzioni di trasferimento trovate al punto I) risultino essere stabili in senso ILUL (Ingresso Limitato Uscita Limitata).

III) Assumendo $K = 2$, determinare i diagrammi di Bode della funzione $W_1(s)$ [Riportare sia i diagrammi esatti che quelli asintotici, indicando i punti di rottura, le pendenze e i valori della fase].

IV) Assumendo $K = 2$, determinare per quali pulsazioni $\omega > 0$ la risposta di regime permanente nell'uscita $y(t)$ relativa all'ingresso $r(t) = \cos(\omega\, t)$ risulta avere ampiezza maggiore di 1.

Esercizio 3. Un sistema di Lur'e è un sistema dinamico lineare accoppiato con una retroazione statica non lineare. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo in rappresentazione i/s/o:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{1}{2}x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u(t) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

e si consideri la seguente retroazione statica dell'uscita, nota come *saturazione*:

$$u(t) = sat(y(t)) = \begin{cases} 1 & \text{se } y(t) > 1, \\ y(t) & \text{se } |y(t)| \leq 1 \\ -1 & \text{se } y(t) < -1 \end{cases} .$$

I) Determinare gli stati di equilibrio del sistema risultante.

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto I) [Osservazione: per l'applicazione del criterio ridotto di Lyapunov è sufficiente che la funzione sia derivabile in un intorno piccolo a piacere dello stato di equilibrio considerato].

Esercizio 4. La dinamica di un'astronave che atterra verticalmente può essere descritta in modo approssimato dal seguente sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \delta\, x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \delta\, u(k) \end{aligned}$$

dove $x_1(k)$ e $x_2(k)$ rappresentano rispettivamente la quota e la velocità verticale (verso l'alto) all'istante k, $u(k)$ è l'accelerazione totale fornita all'astronave (risultante dalla somma degli effetti della propulsione e della gravità), e δ rappresenta il tempo di campionamento.

I) Determinare il numero minimo di istanti di tempo T necessari per far atterrare e fermare l'astronave ($x(T) = 0$), partendo dalla condizione iniziale $x_1(0) = h$, $x_2(0) = 0$. Riportare la sequenza di ingressi ottenuta, in funzione di h e δ.

II) Supponendo ora di poter disporre di 10 istanti di tempo, determinare quali relazioni deve soddisfare la sequenza di ingresso $u(0), u(1), \ldots, u(9)$ per consentire di svolgere la manovra di atterraggio descritta al punto I).

III) Assumendo $h = 100$ e $\delta = 1$, determinare tra tutte le sequenze di ingresso ottenute al punto II), quella che minimizza l'energia dell'ingresso $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} u^2(k)$.

Esercizio 5. Una rete dinamica ad anello è costituita da un grafo con n nodi, come quello rappresentato in Figura 2.

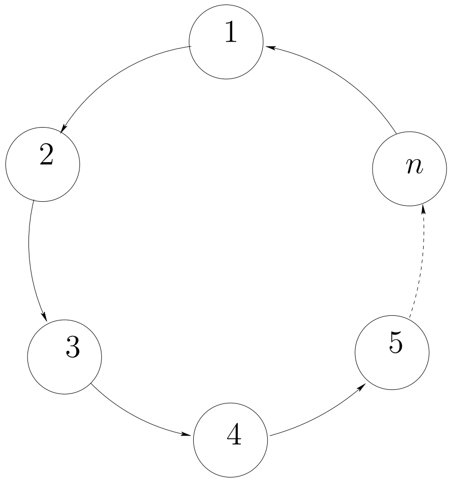

Figura 2.

Lo stato del nodo i-esimo del grafo è rappresentato dalla variabile $x_i(k)$, ed evolve dinamicamente secondo la legge

$$x_i(k+1) = x_{i+1}(k) \ , \quad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

dove si è adottata la convenzione $x_{n+1} = x_1$.
Nel seguito dell'esercizio si consideri per semplicità un anello formato da 4 nodi ($n = 4$).

I) Determinare i modi della risposta libera e discutere la stabilità del sistema.

II) Dimostrare che il sistema è completamente osservabile nel caso in cui l'uscita $y(k)$ sia una qualsiasi delle 4 variabili di stato.

III) Assumendo ora che l'uscita sia $y(k) = x_1(k) + x_2(k)$, determinare il sottospazio degli stati non osservabili del sistema. Determinare se è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato, giustificando la risposta.