Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 17.1.2013

Candidato: .... **Corso di Laurea** ....

Istruzioni per lo svolgimento

- Lo studente ha 24 ore di tempo per svolgere questa prova in itinere. L'elaborato deve essere riconsegnato alle ore 11.00 del 18 gennaio 2013, in aula 145.
- È assolutamente vietato parlare dello svolgimento con chiunque, ad eccezione di Andrea Garulli e Gionata Salvietti. Saremo presenti in laboratorio 143 durante il pomeriggio del 17 gennaio per eventuali richieste di chiarimento. È possibile anche inviare domande via e-mail, ma non è garantito che vengano prese in considerazione.
- È consentito usare qualunque strumento per lo svolgimento del compito, incluso il computer.
- Avendo 24 ore a disposizione, si richiede che la soluzione sia scritta in modo chiaro e ordinato. Ogni risultato deve essere giustificato chiaramente, spiegando come è stato ottenuto e riportando tutti i passaggi. Si possono includere nella spiegazione figure prodotte con strumenti di calcolo, a patto che si spieghi chiaramente come sono state ottenute (ad esempio, riportando il codice utilizzato per generarle). Analogamente si possono includere porzioni di codice Matlab, a patto che sia adeguatamente motivato il loro utilizzo.
- La chiarezza e l'ordine dell'elaborato verranno tenute in considerazione nella votazione finale. Nello svolgimento, le soluzioni dei problemi e le risposte alle singole domande devono essere riportate nello stesso ordine in cui sono date nel testo. Iniziare lo svolgimento di ogni problema in una pagina nuova. Al termine, riconsegnare sia il testo che lo svolgimento, riportando il proprio nome e cognome su tutti i fogli.
- Nel caso due compiti presentino anche una porzione di soluzione palesemente uguale, entrambi i compiti verranno annullati e gli autori esclusi da tutti gli appelli regolari della prossima sessione. Avere 24 ore a disposizione è un'opportunità che viene offerta allo studente per riflettere meglio sui problemi posti e produrre una soluzione più ragionata e meditata. Sfruttate al meglio questa occasione!

Esercizio 1. Il sistema lineare a tempo continuo rappresentato dallo schema a blocchi in Figura 1 è costituito da un sistema meccanico la cui funzione di trasferimento è pari a

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

inserito in un doppio anello di retroazione in cui $C(s) = \dfrac{10}{s}$, e K e H sono due costanti reali. .

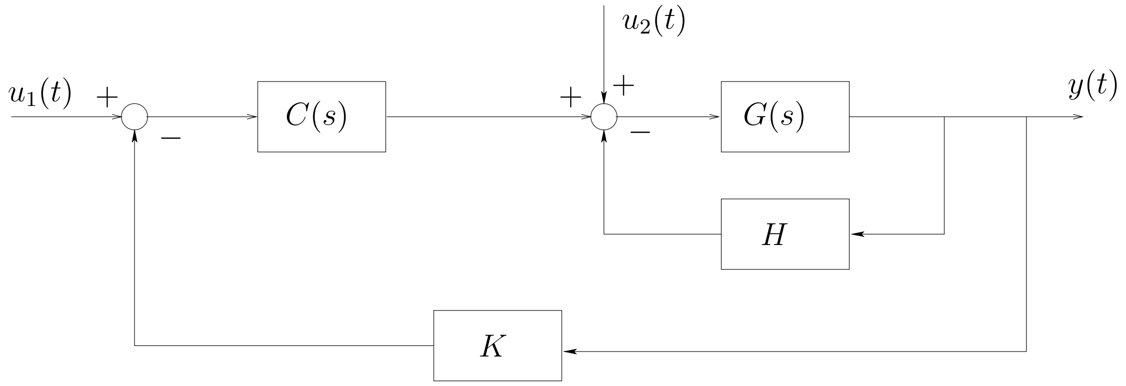

Figura 1.

I) Determinare le funzioni di trasferimento:

- $W_1(s)$, dall'ingresso $u_1(t)$ all'uscita $y(t)$;
- $W_2(s)$, dall'ingresso $u_2(t)$ all'uscita $y(t)$;

in funzione di K e H.

II) Determinare quali relazioni devono soddisfare le costanti K e H, affinché le funzioni di trasferimento trovate al punto I) risultino essere stabili in senso BIBO.

III) Assumendo $K = 1$ e $H = 11$, determinare i diagrammi di Bode delle funzioni $W_1(s)$ e $W_2(s)$.

IV) Assumendo $K = 1$, $H = 11$ e $u_1(t) = 0$, determinare la risposta di regime permanente nell'uscita $y(t)$, relativa all'ingresso $u_2(t) = \cos(2\,t)$.

Esercizio 2. In questo esercizio, si desidera analizzare la dinamica del corpo elettorale degli Stati Uniti d'America su base annuale. Si indichi con $x_1(k)$ la frazione di elettori democratici nell'anno k, con $x_2(k)$ la frazione di indecisi e con $x_3(k)$ la frazione di elettori repubblicani. L'evoluzione delle intenzioni di voto dall'anno k all'anno $k+1$ è descritta dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= d\, x_1(k) + i_d\, x_2(k) \\ x_2(k+1) &= (1-d)\, x_1(k) + (1-i_d-i_r)\, x_2(k) + (1-r)\, x_3(k) \\ x_3(k+1) &= i_r\, x_2(k) + r\, x_3(k) \end{aligned}$$

dove d ed r rappresentano la quota di elettori che restano rispettivamente democratici e repubblicani da un anno al successivo, mentre i_d ed i_r sono le frazioni di indecisi nell'anno k che diventano rispettivamente democratici e repubblicani nell'anno $k+1$. Per tutto l'esercizio si assuma $d = r = 0.8$.

I) Assumendo $i_d = i_r = 0.3$, studiare la stabilità del sistema e determinare la distribuzione asintotica dell'elettorato a partire da una situazione iniziale in cui democratici, repubblicani e indecisi sono uniformemente distribuiti ($x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \frac{1}{3}$). Dimostrare che la distribuzione asintotica è sempre la stessa indipendentemente dalla distribuzione iniziale dell'elettorato.

II) Assumendo $i_d = 0.4$, $i_r = 0.1$ e $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \frac{1}{3}$, determinare il numero minimo di anni che occorrono affinché la percentuale di democratici superi il 50% dell'elettorato.

III) Assumendo di sapere che $i_d + i_r = 0.5$, ma di non conoscere il valore di i_d e i_r, determinare per quali valori di i_d la percentuale di democratici supera asintoticamente (cioè per $k \to +\infty$) il 50% dell'elettorato.

IV) Determinare per quali valori di i_d e i_r il sistema è completamente osservabile, nei seguenti casi:

- quando si prende come uscita del sistema la frazione di elettori democratici $x_1(k)$;
- quando si prende come uscita del sistema la frazione di elettori indecisi $x_2(k)$.

Nei casi in cui il sistema non è completamente osservabile, determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{X}^{\bar{o}}$.

Esercizio 3. Un bioreattore continuo per la fermentazione alcolica può essere descritto dalle equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{x_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+4} - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\beta\frac{x_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+4} + (1 - x_2(t))\, u(t) \end{aligned}$$

dove $x_1(t)$ rappresenta la concentrazione batterica, $x_2(t)$ la concentrazione del substrato di reazione e $u(t)$ la quantità di zucchero fornita per la fermentazione. Si assuma una alimentazione continua costante del bioreattore:

$$u(t) = \frac{1}{2} \quad \forall\, t\ .$$

I) Determinare gli stati di equilibrio del bioreattore in funzione del tasso di reazione $\beta \in \mathbb{R}$.

II) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto I), in funzione di β.

III) Assumendo $\beta = 4$, determinare i modi della risposta libera del sistema linearizzato, nell'intorno dei punti di equilibrio determinati al punto I).

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + \alpha\, x_3(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha\, x_1(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) &= -x_3(k) + u(k) \end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

I) Determinare per quali valori di α il sistema non è completamente raggiungibile e il corrispondente sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^r$.

II) Per i valori di α trovati al punto I), determinare una decomposizione di raggiungibilità del sistema, calcolare gli autovalori raggiungibili e quelli non raggiungibili. Dire se il sistema è stabilizzabile, giustificando la risposta.

III) Assumendo $\alpha = 0$, determinare la matrice F di una legge di retroazione dello stato $u(k) = F\,x(k)$, in modo tale che la risposta libera del sistema risultante si annulli in un tempo finito per qualunque condizione iniziale $x(0)$. Utilizzando la matrice F ottenuta, determinare la risposta libera nello stato relativa alla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

IV) Assumendo $\alpha = 0$, determinare la sequenza di ingresso in grado di portare il sistema nello stato

$$x(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

all'istante $k = 3$, a partire dallo stato iniziale nullo.

V) Assumendo $\alpha = 0$, determinare tutte le sequenze di ingresso in grado di portare il sistema nello stato

$$x(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

all'istante $k = 4$, a partire dallo stato iniziale nullo, e tra queste quella che minimizza l'energia dell'ingresso $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} u^2(k)$.