STUDIO DEL SEGNO DELLA PARTE REALE DELLE RADICI DI UN POLINOMIO

Problema importante per l'analisi dei sistemi ~~LTI~~ a tempo continuo:

* convergenza dei modi dei sistemi LTI
* stabilità asintotica degli stati di equilibrio
* stabilità ILUL dei sistemi LTI

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Regola di Cartesio: condizione necessaria affinché le radici di $p(s)$ abbiano tutte parte reale negativa è $a_i > 0 \quad \forall i = 0, \dots, n-1$

[necessaria e sufficiente se $n=2$!]

→ CRITERIO DI ROUTH

Si deve costruire una tabella che ha $n+1$ righe.

$$
\begin{array}{c|cccc}
n & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\
n-2 & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \dots \\
n-3 & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & \\
\vdots & & & & \\
1 & & & & \\
0 & * & & &
\end{array}
$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_{n-7}}{a_{n-1}} \quad \dots$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-2}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-2}} \quad \dots$$

Risultato: ad ogni variazione di segno nella prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice di $p(s)$ a parte reale positiva, a ogni permanenza di segno una radice a parte reale negativa.

Esempi

1) $p(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 & \\ 0 & 1 & & \end{array}$$

$\rightarrow$ $p(s)$ ha 3 radici a parte reale negativa

Infatti: $p(s) = \underbrace{(s+1)}_{-1}\underbrace{(s^2+s+1)}_{\frac{-1\pm\sqrt{3}j}{2}}$

2) $p(s) = s^3 + 8s^2 + 6s + K \qquad K \in \mathbb{R}$

Per quali K tutte le radici hanno parte reale negativa?

Cartesio $\Rightarrow$ $K > 0$ (condizione necessaria)

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & K \\ 1 & \frac{48-K}{8} & 0 \\ 0 & K & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 48 - K > 0 \\ K > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{0 < K < 48}$$

Casi particolari

(a) un coefficiente nullo nella prima colonna

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2$$

4	1	1	2	1
3	2	2	0	2
2	$\overset{\varepsilon}{(\cancel{0})}$	2		ε
1	$\frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon}$	0		$\frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon}$
0	2			2

Analisi per $\varepsilon \to 0^+$: $+ + + - +$ 2 variazioni

per $\varepsilon \to 0^-$: $+ + - + +$ 2 variazioni

$\Rightarrow$ 2 radici a parte reale positiva

Infatti $p(s) = (s+1)(s^3 + s^2 + 2)$

-1

-1.6956

$0.3478 \pm j\,1.0289$

E. $p(s) = s^3 + s^2 + 2$

(b) un intera riga nulla nella tabella di Routh

$p(s) = s^3 + s^2 - s - 1$

Cartesio: # radici a parte reale >0 ≥ 1

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & & & \end{array}$$

← riga nulla !

Costruisco il polinomio ausiliario $p_a(s)$ con i coefficienti dell'ultima riga non nulla

$p_a(s) = 1 \cdot s^2 + (-1) \cdot s^0 = s^2 - 1$

Faccio la derivata di $p_a(s) \rightarrow p_a'(s) = 2s$

Inserisco i coefficienti di $p_a'(s)$ al posto della riga nulla

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \end{array}$$

← coeff. di $p_a'(s)$

Una variazione $\Rightarrow$ una radice a parte reale positiva

Infatti $p(s) = (s+1)(s^2-1) = (s+1)^2(s-1)$

$-1, -1$ $\quad$ 1

Esempio

$$p(s) = s^6 + s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 1$$

6	1	3	3	1
5	1	2	1	
4	1	2	1	
3	$\cancel{0}$ 4	$\cancel{0}$ 4	$\cancel{0}$	
2	1	1		
1	$(\cancel{0})$ 2			
0	1			

$\leftarrow$ $p_a(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$ $\quad \pm j$

$p_a'(s) = 4s^3 + 4s$

$\leftarrow$ $p_a(s) = (s^2 + 1)$ $\quad \pm j$

$p_a'(s) = 2s$

Risultato: quando la tabella presenta una riga nulla, dopo l'introduzione dei polinomi $p_a'(s)$ le permanenze di segno danno il numero di radici a parte reale ~~positiva~~ negativa o nulla, mentre le variazioni danno il numero di radici a parte reale positiva.

In particolare si dimostra che:

* le radici di $p_a(s)$ sono anche radici di $p(s)$
* le radici di $p_a(s)$ sono simmetriche rispetto all'asse immaginario

Infatti: $p(s) = (s^2 + s + 1) \cdot (s^2 + 1)^2$

Caso TD: criterio di Jury

PROPRIETÀ STRUTTURALI DEI SISTEMI DINAMICI

→ Raggiungibilità
→ Osservabilità

RAGGIUNGIBILITÀ E PROBLEMA DEL CONTROLLO

Sistema LTI a tempo discreto, in rappresentazione di stato

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

Sia $x(0) = x_{in}$ e $x(T) = x_{fin}$

Esiste una sequenza di ingressi $u(0), u(1), \dots, u(T-1)$ in grado di portare lo stato del sistema da x_{in} a $t=0$ fino a x_{fin} a $t=T$?

Sappiamo che

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{x_\ell(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)}_{x_f(k)}$$

$$x(T) - A^T x(0) = \sum_{i=0}^{T-1} A^{T-1-i} B u(i)$$

$$x_{fin} - A^T x_{in} = A^{T-1} B u(0) + A^{T-2} B u(1) + \dots + AB\, u(T-2) + B u(T-1)$$

$$\underbrace{x_{fin} - A^T x_{in}}_{n\times 1} = \underbrace{\left[B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^2B \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{T-2}B \;\vdots\; A^{T-1}B \right]}_{\mathcal{R}_T \in \mathbb{R}^{n\times T\cdot m}} \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ u(T-3) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}}_{mT\times 1}$$

Il problema ammette soluzione se e solo se $x_{fin} - A^T x_{in} \in \operatorname{Im} \mathcal{R}_T$.

<u>Definizione</u>. Uno stato $\bar{x}$ si dice <u>raggiungibile</u> (dallo stato zero) in k passi se esiste una sequenza di ingressi $u(0), u(1), \dots u(k-1)$ tale che $x(k) = \bar{x}$, con $x(0) = 0$.

$\Rightarrow$ L'insieme degli stati raggiungibili in k passi è dato dall'immagine della matrice $\mathcal{R}_k = [B \;\; AB \; \dots \; A^{k-1}B]$

$\chi_k^R = \operatorname{Im} \mathcal{R}_k$ ... è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$!

$\chi_1^R = \operatorname{Im} \mathcal{R}_1 = \operatorname{Im} B$

$x(1) = \cancel{A\,x(0)} + B \cdot u(0)$

$$\mathcal{X}_2^R = \operatorname{Im} R_2 = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{X}_1^R$$

$$\mathcal{X}_3^R = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{X}_2^R \supseteq \mathcal{X}_1^R$$

In generale:

$$\mathcal{X}_1^R \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \mathcal{X}_3^R \cdots \subseteq \mathcal{X}_k^R \subseteq \mathcal{X}_{k+1}^R \cdots$$

Se $\exists\, \bar{k} : \mathcal{X}_{\bar{k}}^R = \mathbb{R}^n$, il sistema si dice COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

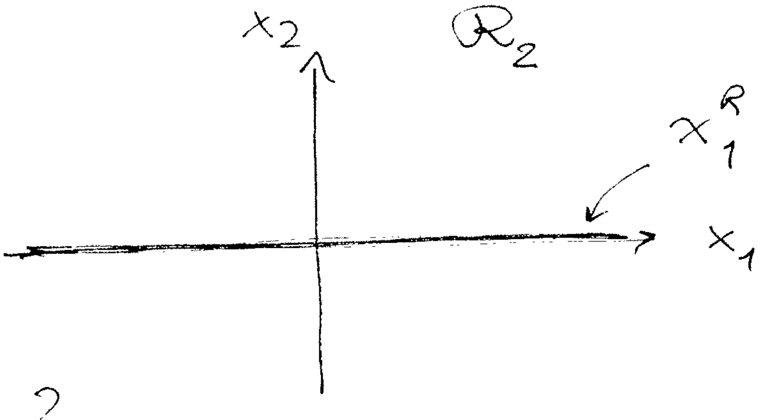
Esempio 1

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{X}_1^R = \operatorname{Im}[B] = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_2^R = \operatorname{Im}[B \ \ AB] = \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}_2} = \mathbb{R}^2$$

completamente raggiungibile



Esempio 2

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{X}_1^R = \operatorname{Im}[B] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_2^R = \operatorname{Im}[B \ \ AB] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{X}_1^R$$

$$\mathcal{X}_3^R = \operatorname{Im}[B \ \ AB \ \ A^2B] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & \underset{AB}{a_1} & a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathcal{X}_k^R = \operatorname{Im}[B \ AB \ \dots \ A^{k-1}B] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall a_1$$

Sistema non è completamente raggiungibile

$$x_1(k+1) = a_1 x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = a_2 x_2(k)$$

se $x(0) = \emptyset \implies x_2(k) \equiv 0 \quad \forall k$

Teorema di Caley-Hamilton

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\quad p(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$
$$= \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$\implies A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \emptyset$$

(A è radice del suo polinomio caratteristico)

Conseguenza:

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \alpha_{n-2}A^{n-2} - \dots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$
$$A^n B = -\alpha_{n-1}\underbrace{A^{n-1}B} - \alpha_{n-2}\underbrace{A^{n-2}B} \dots - \alpha_1 \underbrace{AB} - \alpha_0 \underbrace{B}$$

$$\implies \operatorname{Im} R_{n+1} = \operatorname{Im}\left[A^n B \;\; A^{n-1}B \;\; \dots \;\; AB \;\; B\right]$$

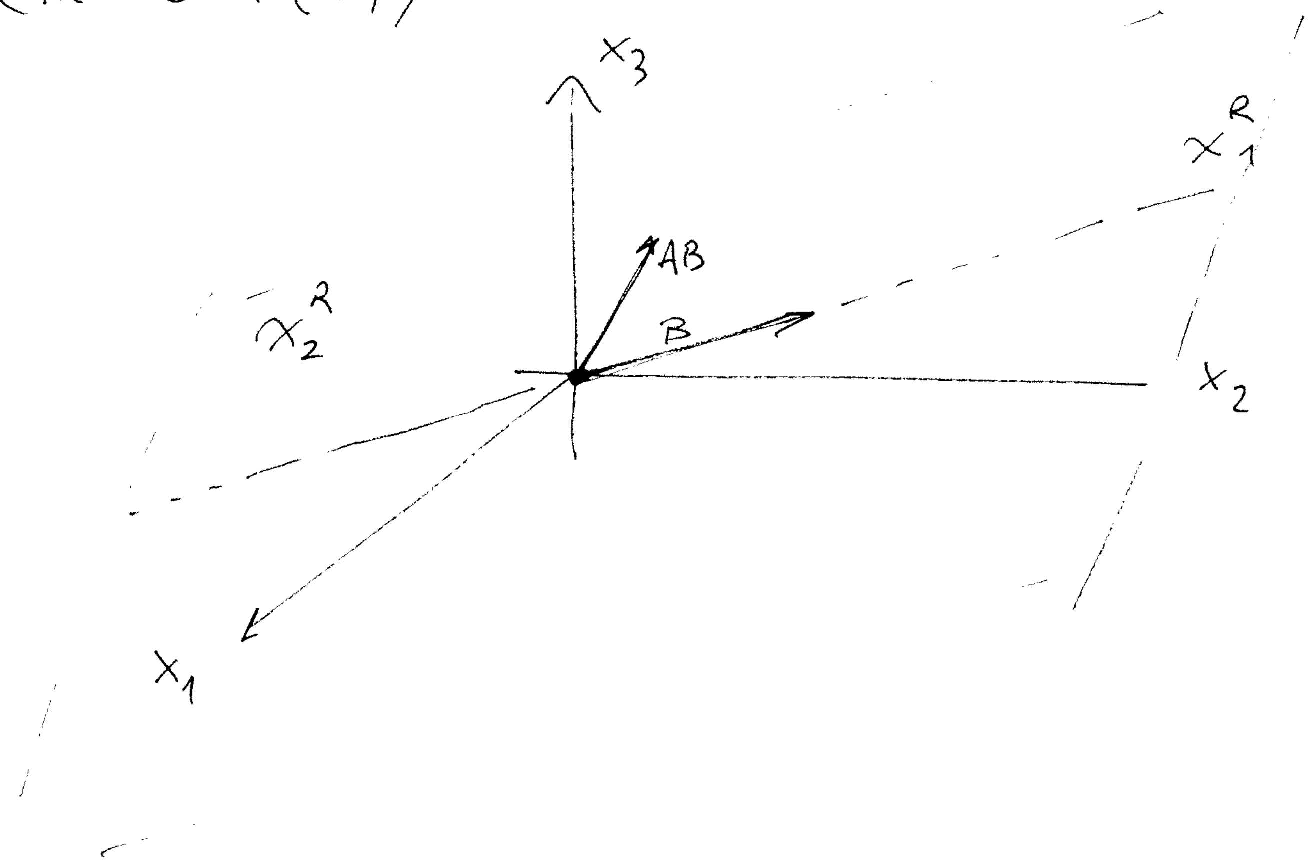
coincide con $\operatorname{Im} R_n = \operatorname{Im}\left[A^{n-1}B \dots AB \;\; B\right]$

$$\implies \mathcal{X}_1^R \subseteq \mathcal{X}_2^R \subseteq \mathcal{X}_3^R \dots \subseteq \mathcal{X}_n^R = \mathcal{X}_{n+1}^R = \dots = \mathcal{X}_k^R$$
$$\forall k > n$$

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio raggiungibile in n passi, che quindi prende il nome di sottospazio raggiungibile del sistema ($\mathcal{X}^R$)

$\chi^R = \mathrm{Im}\, Q$

dove $Q = [B \;\; AB \; \dots \; A^{n-1}B]$ è la
MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ del sistema
($n = \dim(x)$)



Se $x(0) \neq 0$, devo verificare se il vettore

$v = x_{fin} - A^T x_{in} \in \mathrm{Im}\, Q_T$

che equivale a $x_{fin} \in A^T x_{in} + \mathrm{Im}\, Q_T$

Calcolo della sequenza di ingresso
$u(0), u(1), \dots u(T-1)$

$$x_{fin} - A^T x_{in} = v = \mathcal{R}_T \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u(T-1) \\ u(T-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}}$$

dobbiamo risolvere

$$\underbrace{\mathcal{R}_T}_{n \times Tm} \cdot \underbrace{\mathcal{U}}_{Tm \times 1} = \underbrace{v}_{n \times 1}$$ nell'incognita $\mathcal{U}$

Se $m=1$, $T=n$ e il sistema è completamente raggiungibile, si ha l'unica soluzione

$$\mathcal{U} = \mathcal{R}_T^{-1} v$$ [caso molto particolare!]

In generale, se $T \cdot m > n$ (caso più comune) ci sono infinite soluzioni:

$$\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}$$ dove $\mathcal{R}_T \mathcal{U}_{om} = \emptyset$

e $\bar{\mathcal{U}}$ è una soluzione particolare di $\mathcal{R}_T \mathcal{U} = v$.

Sia $\operatorname{Im} \mathcal{R}_T = \mathbb{R}^n$ (sist. compl. raggiungibile)
e poniamo $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{R}_T^T \eta$, $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\mathcal{R}_T}_{n \times Tm} \cdot (\underbrace{\mathcal{R}_T^T}_{Tm \times n} \eta) = v$$

$$\underbrace{\left(R_T R_T^T\right)}_{n\times n} \eta = v$$

$\hookrightarrow$ invertibile (rank $R_T = n$)

$$\eta = \left(R_T R_T^T\right)^{-1} v$$

$$\bar{u} = R_T^T \left(R_T R_T^T\right)^{-1} v \quad \leftarrow \text{ soluzione particolare}$$

$$u = R_T^T \left(R_T R_T^T\right)^{-1} v + u_{om}$$

con $u_{om} \in \operatorname{Ker} R_T$

<u>Problema</u>. Dato $x(0) = x_{in}$ e $x(T) = x_{fin}$, determinare la sequenza $u(0), \dots u(T-1)$ in grado di portare lo stato da x_{in} a x_{fin} in T passi, in modo che $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ sia minima.

(problema di controllo a minima energia).

$\Rightarrow$ La soluzione è proprio

$$\bar{u} = R_T^T \left(R_T R_T^T\right)^{-1} v \quad !$$

$$\min_{s.t.} \sum \|u(t)\|^2 = \mathcal{U}^T \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om} \qquad \bar{\mathcal{U}} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} v$$

$$\boxed{\mathcal{U}_{om} \in \operatorname{Ker} R_T}$$

$$\Rightarrow \bar{\mathcal{U}}^T \mathcal{U}_{om} = \emptyset$$

$$\mathcal{U}^T\mathcal{U} = (\bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om})^T (\bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}) = \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} + \cancelto{0}{\mathcal{U}_{om}^T \bar{\mathcal{U}}} +$$

$$+ \cancelto{0}{\bar{\mathcal{U}}^T \mathcal{U}_{om}} + \mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om} = \underbrace{\bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}}}_{\geq 0} + \underbrace{\mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om}}_{\geq 0}$$

Il minimo di $\mathcal{U}^T\mathcal{U}$ si ha scegliendo $\mathcal{U}_{om} = \emptyset$ e quindi $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}$.

$$\hookrightarrow \quad \min_{\substack{s.t.\\ \mathcal{U}_{om} \in \operatorname{Ker} R_T}} \bar{\mathcal{U}}^T \bar{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{om}^T \mathcal{U}_{om} \qquad \Rightarrow \mathcal{U}_{om} = \emptyset$$

Esempio

$$x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_2(k)$$
$$x_3(k+1) = u(k)$$

1) Determinare $\mathcal{X}^R$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^R = \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}}_{R} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2) Determinare il minor numero di passi per raggiungere lo stato $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ partendo da $x(\emptyset) = 0$, e la corrispondente sequenza di ingresso.

$$\mathcal{X}_1^R = \operatorname{Im}[B] = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{no}}$$

$$\mathcal{X}_2^R = \operatorname{Im}[B \;\; AB] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

$$\underset{\bar{x}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{(B \;\; AB)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u(1) + 2u(0) &= 2 \\ u(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} u(0) &= \tfrac{1}{2} \\ u(1) &= 1 \end{aligned}$$

3) Determinare il minor numero di passi necessari per portare a zero lo stato partendo da $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la corrispondente sequenza di ingresso

min k

tale che $\cancel{x(k)} \underbrace{- A^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \operatorname{Im} R_k$ ($x(k) \to 0$)

$k=1 \qquad -A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} R_1 = \operatorname{Im} B = L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k=2 \qquad -A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} R_2 = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ok

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(1) + 2u(0) = -4 \\ u(1) = \emptyset \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} u(0) = -2 \\ u(1) = \emptyset \end{array}$$

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITÀ

Il sistema non sia completamente raggiungibile e

$$\text{rank } R = \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = r < n$$

indice di raggiungibilità

Sia T_r una matrice $n \times r$, le cui colonne siano una base del sottospazio $X^R = \text{Im } R$

$$T = \Big[\underbrace{T_r}_{n \times r} \;\vdots\; \underbrace{T_{\bar{r}}}_{n \times (n-r)} \Big]$$ in modo che $\det T \neq \emptyset$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \, r \times n \\ \} \, (n-r) \times n \end{matrix} \quad : \quad U_{\bar{r}} T_r = \emptyset$$

Uso T per una trasformazione di similitudine del sistema

$$\bar{x}(k) = T^{-1} x(k)$$

$$\bar{x}(k+1) = T^{-1} x(k+1) = T^{-1}\big(Ax(k) + Bu(k)\big) =$$

$$= T^{-1}A\,x(k) + T^{-1}B\,u(k) =$$

$$= \underbrace{T^{-1}A\,T}_{\bar{A}}\,\bar{x}(k) + \underbrace{T^{-1}B}_{\bar{B}}\,u(k)$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar{r}} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_r & T_{\bar{r}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U_r \\ U_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A T_r & A T_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r A T_r & U_r A T_{\bar{r}} \\ U_{\bar{r}} A T_r & U_{\bar{r}} A T_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

Per Cayley-Hamilton, $A T_r \in \operatorname{Im} \mathcal{R}$

$\Rightarrow U_{\bar{r}} A T_r = \emptyset$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline \emptyset & A_{\bar{r}} \end{array}\right]$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} U_r B \\ U_{\bar{r}} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B \in \operatorname{Im} \mathcal{R} \rightarrow U_{\bar{r}} B = \emptyset$

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, r \\ \}\, n-r \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r u(k) \\ x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) \leftarrow \text{parte non raggiungibile del sistema} \end{cases}$$

$$\{\text{autovalori di } A\} = \underbrace{\{\text{autovalori di } A_r\}}_{\text{raggiungibili}} \cup \underbrace{\{\text{autoval di } A_{\bar{r}}\}}_{\text{non raggiungibili}}$$

Dalla decomposizione di raggiungibilità, si ottiene:

$$\bar{C}(zI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D} = C_r(zI-A_r)^{-1}B_r + D$$

dove $\bar{C} = CT = [C_r \;\; C_{\bar{r}}]$

$\Rightarrow$ I poli della funzione di trasferimento sono gli autovalori raggiungibili. Quelli non raggiungibili si cancellano.

$$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) =$$

$$= \underbrace{CT}_{\bar{C}}\,\bar{x}(k) + \underbrace{D}_{\bar{D}}\,u(k)$$

Sistemi equivalenti:

$$\bar{A} = T^{-1} A T$$
$$\bar{B} = T^{-1} B$$
$$\bar{C} = CT$$
$$\bar{D} = D$$

Ogni rappresentazione i/s/o equivalente corrisponde a un cambio di base $\bar{x} = T^{-1}x$ nello spazio degli stati $\mathbb{R}^n$ (hanno tutti la stessa funzione di trasferimento)

<u>Esempio</u>

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{R} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{X}^R$$

Il sistema <u>non</u> è completamente raggiungibile

$$T = \Big[\underbrace{T_r}_{\text{base di } \mathcal{X}^R} \;\vdots\; \underbrace{T_{\bar{r}}}_{\text{completa la base di } \mathbb{R}^2}\Big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} 3 & -2 \\ \hdashline 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

$\lambda_r = 3$ autov. raggiungib.

$\lambda_{\bar{r}} = -1$ autov. non raggiungibile

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_r(k+1) = 3\,\bar{x}_r(k) - 2\,\bar{x}_{\bar{r}}(k) + u(k)$$

$$\bar{x}_{\bar{r}}(k+1) = -\bar{x}_{\bar{r}}(k)$$

$$y(k) = \bar{x}_r(k)$$

$$G(z) = \bar{C}\,(zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-3 & 2 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & -2 \\ 0 & z-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(z-3)(z+1)} = \frac{\cancel{z+1}}{(z-3)\cancel{(z+1)}} =$$

$$= \frac{1}{z-3}$$

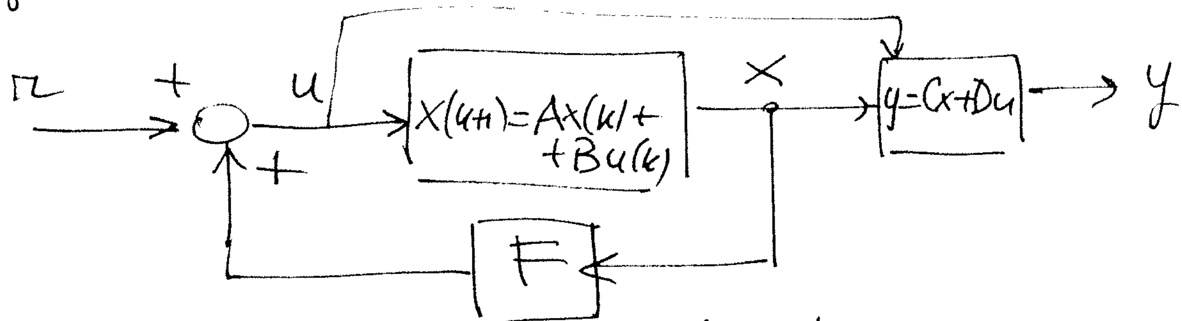
CONTROLLO IN RETROAZIONE DELLO STATO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Supponendo di conoscere lo stato $x(k)$ all'istante k, scegliamo l'ingresso

$$u(k) = F \cdot x(k) + r(k)$$

dove $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $r(k)$ è un opportuno segnale esterno di riferimento.



Schema di controllo ad anello chiuso

$$x(k+1) = Ax(k) + B\left[Fx(k) + r(k) \right]$$

$$x(k+1) = Ax(k) + BFx(k) + Br(k)$$

$$\boxed{x(k+1) = (A+BF)\,x(k) + Br(k)}$$

$$\underbrace{A}_{n \times n} + \underbrace{B}_{n \times m}\underbrace{F}_{m \times n}$$

Gradi di libertà: $m \cdot n$ elementi di F

<u>Risultato</u>. Se la coppia (A, B) è completamente raggiungibile, per ogni insieme di autovalori $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$ dati, esiste una matrice F tale che

$$\det(\lambda I - A - BF) = (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \cdots (\lambda - \bar{\lambda}_n)$$

[allocazione degli autovalori]

MATLAB: place, acker

<u>Un algoritmo per costruire la matrice F</u>

$\emptyset$) Siano dati $A, B, \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n\}$.

1) Si costruiscano le matrici

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

Si noti che

$$A_c = T^{-1} A T$$
$$B_c = T^{-1} B$$

dove $T = \mathcal{R} \cdot \mathcal{R}_c^{-1}$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2) $F_c = (F \cdot T) = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 & \hat{f}_1 & \dots & \hat{f}_{n-1} \end{bmatrix}$

$$A_c + B_c F_c = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline * & * & \dots & \dots & * \end{array}\right]$$

$$-a_0 + \hat{f}_0 \quad -a_1 + \hat{f}_1 \quad \dots \quad -a_{n-1} + \hat{f}_{n-1}$$

$$\det(\lambda I - A_c - B_c F_c) =$$

$$= \lambda^n + (a_{n-1} - \hat{f}_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \hat{f}_1)\lambda + (a_0 - \hat{f}_0)$$

3) Impongo

$$\lambda^n + (a_{n-1} - \hat{f}_{n-1})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - \hat{f}_1)\lambda + (a_0 - \hat{f}_0) =$$

$$= (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \dots (\lambda - \bar{\lambda}_n) \longleftarrow \text{noto!}$$

e trovo gli $\hat{f}_j$, $j = 0, \dots, n-1$

4) $F = F_c \cdot T^{-1} = [\hat{f}_0 \; \hat{f}_1 \; \dots \; \hat{f}_{n-1}] \cdot T^{-1}$

$\Rightarrow \det(\lambda I - A - BF) = \det(\lambda I - A_c - B_c F_c) =$
$= (\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \dots (\lambda - \bar{\lambda}_n)$

<u>NOTA</u>

Data una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

le matrici A_c, B_c e

$C_c = [\, b_0 \; b_1 \; b_2 \; \dots \; b_{n-1} \,]$ $\quad D_c = \emptyset$

formano la REALIZZAZIONE CANONICA DI CONTROLLO del sistema, e si ha

$G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c$

Cosa succede se (A, B) non è completamente raggiungibile?
Dalla decomposizione di raggiungibilità

$$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r u(k)$$

$$x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$$

$$u(k) = F x(k) = \underbrace{F T}_{\bar{F}} \bar{x}(k) = \left[\bar{F}_r \;\vdots\; \bar{F}_{\bar{r}} \right] \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$$

Sostituendo nel sistema

$$x_r(k+1) = A_r x_r(k) + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) + B_r \left(\bar{F}_r x_r(k) + \bar{F}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k) \right) =$$

$$= \left(A_r + B_r \bar{F}_r \right) x_r(k) + \left(A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}} \right) x_{\bar{r}}(k)$$

$$x_{\bar{r}}(k+1) = A_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(k)$$

$$\bar{A} + \bar{B}\bar{F} = \left[\begin{array}{c|c} A_r + B_r \bar{F}_r & A_{r\bar{r}} + B_r \bar{F}_{\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array} \right]$$

$\Rightarrow$ Con la retroazione dello stato è possibile modificare solo gli autovalori della parte raggiungibile A_r (che possono essere allocati a piacere)

Definizione: un sistema si dice STABILIZZABILE se può essere reso asintoticamente stabile mediante retroazione dello stato.

Risultato: un sistema è stabilizzabile se e solo se gli autovalori non raggiungibili sono asintoticamente stabili (cioè a modulo minore di 1 nei sistemi TD, a parte reale negativa nei sistemi TC).

Sistemi a tempo continuo

Tutti i concetti e i risultati visti per i sistemi TD valgono anche per quelli TC.

Uno stato $\bar{x} \in \mathrm{Im}[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B] = X_R$ è raggiungibile $\forall T > 0$. Cioè $\exists\, u(t),\ t \in [0, T]$ tale che

$$\bar{x} = \int_0^T e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

Esercizio

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = x_2(t) + u(t)$$

Determinare, se possibile, una legge di controllo $u(t) = Fx(t)$ in modo che il sistema risultante abbia modi: e^{-t}, e^{-2t}, te^{-2t}.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad u(t) = Fx(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = (A+BF)x(t)$$

Gli autovalori di $A+BF$ devono essere: $-1, -2, -2$, cioè

$$\det(sI - A - BF) = (s+1)(s+2)^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det R = 1 - (-3) = 4$$

$\Rightarrow$ (A, B) è completamente raggiungibile

Calcolo di F

1° metodo. Algoritmo (A_c, B_c)

$$\det(sI-A) = \det\begin{pmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{pmatrix} = (s-1)(s^2-1) =$$

$$= s^3 - s^2 - s + 1$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$s^3 + (a_2 - \hat{f}_2)s^2 + (a_1 - \hat{f}_1)s + (a_0 - \hat{f}_0) = (s+1)(s+2)^2$$

$$s^3 + (-1-\hat{f}_2)s^2 + (-1-\hat{f}_1)s + (1-\hat{f}_0) = (s+1)(s^2+4s+4)$$

$$= s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

$$\left.\begin{array}{l} -1-\hat{f}_2 = 5 \\ -1-\hat{f}_1 = 8 \\ 1-\hat{f}_0 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \hat{f}_2 = -6 \\ \hat{f}_1 = -9 \\ \hat{f}_0 = -3 \end{array}$$

$$F_c = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$F = F_c \cdot T^{-1} \qquad \text{dove } T = R \cdot R_c^{-1}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(in alternativa $R_c = \begin{bmatrix} B_c & A_cB_c & A_c^2B_c \end{bmatrix}$)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\det T}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -18 & -12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

verifica: $A+BF$ deve avere autovalori $-1, -2, -2$

2° metodo: sostituzione diretta di F

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$A + BF = \begin{bmatrix} 1+f_0 & 2+f_1 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_0 & 1+f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A - BF) = (s+1)(s+2)^2 = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

$$\det\begin{pmatrix} s-1-f_0 & -2-f_1 & -f_2 \\ 0 & s & -1 \\ -f_0 & -1-f_1 & s-f_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (s-1-f_0)(s^2-f_2 s-1-f_1)-f_0(2+f_1+f_2 s) =$$

$$= s^3+s^2(-1-f_0-f_2)+s(-1-f_1+f_2+\cancel{f_0 f_2}-\cancel{f_0 f_2})+$$

$$+\ 1+f_0+f_1+\cancel{f_0 f_1}-2f_0-\cancel{f_0 f_1} = s^3+5s^2+8s+4$$

$$\begin{cases} -1-f_0-f_2 = 5 \\ -1-f_1+f_2 = 8 \\ 1-f_0+f_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow F = [-9 \quad -6 \quad 3]$$

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + \alpha\, x_3(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha\, x_1(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) &= -x_3(k) + u(k) \end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

I) Determinare per quali valori di α il sistema non è completamente raggiungibile e il corrispondente sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^r$.

II) Per i valori di α trovati al punto I), determinare una decomposizione di raggiungibilità del sistema, calcolare gli autovalori raggiungibili e quelli non raggiungibili. Dire se il sistema è stabilizzabile, giustificando la risposta.

III) Assumendo $\alpha = 0$, determinare la matrice F di una legge di retroazione dello stato $u(k) = F\,x(k)$, in modo tale che la risposta libera del sistema risultante si annulli in un tempo finito per qualunque condizione iniziale $x(0)$. Utilizzando la matrice F ottenuta, determinare la risposta libera nello stato relativa alla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

IV) Assumendo $\alpha = 0$, determinare la sequenza di ingresso in grado di portare il sistema nello stato

$$x(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

all'istante $k = 3$, a partire dallo stato iniziale nullo.

V) Assumendo $\alpha = 0$, determinare tutte le sequenze di ingresso in grado di portare il sistema nello stato

$$x(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

all'istante $k = 4$, a partire dallo stato iniziale nullo, e tra queste quella che minimizza l'energia dell'ingresso $\sum_{k=0}^{3} u^2(k)$.

1)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2-1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{R} = \alpha(\alpha^2-1) - (1-\alpha) = \alpha(\alpha-1)(\alpha+1) + \alpha - 1 =$$
$$= (\alpha-1)\left[\alpha^2+\alpha+1\right]$$

$\Rightarrow$ Sistema completamente raggiungibile $\forall \alpha \neq 1$

Per $\alpha = 1$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X^R = L\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

2)
$$T = \left[T_r \mid T_{\bar{r}}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\quad\quad}_{\text{base di } X^R}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{2\times 2}{A_r} & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & \underset{1\times 1}{A_{\bar{r}}} \end{array}\right]$$

autovalore non raggiungibile

$\Downarrow$

il sistema non è stabilizzabile

($\forall F$ avrò sempre il modo $(-1)^k$)

3) Trovare F in modo che $A+BF$ abbia tutti autovalori <u>uguali a zero</u> (controllo dead-beat)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(zI-A-BF)=z^3$$

$$A+BF=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_0 & f_1 & -1+f_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(zI-A-BF)=\det\begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ -f_0 & -f_1 & z+1-f_2 \end{pmatrix}=$$

$$= z\left[z^2+(1-f_2)z-f_1\right]-f_0 = \underline{z^3+(1-f_2)z^2-f_1z-f_0} = z^3$$

$$\begin{aligned} 1-f_2&=0 \\ -f_1&=0 \\ -f_0&=0 \end{aligned} \qquad F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u(k)=x_3(k)$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1)&=x_2(k) \\ x_2(k+1)&=x_3(k) \\ x_3(k+1)&=-x_3(k)+u(k) \end{aligned}$$

se $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A+BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\ell(k) = (A+BF)^k x(0)$$

$$x_\ell(1) = (A+BF)\, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\ell(2) = (A+BF)\, x_\ell(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_\ell(3) = \emptyset \quad \longrightarrow \quad x_\ell(k) = \emptyset \quad \forall\, k \geq 3$$

$\Rightarrow$ Fare punti 4 e 5 per esercizio.

OSSERVABILITÀ

$$X(k+1) = A\,x(k)$$
$$y(k) = C\,x(k)$$

<u>Definizione</u> Uno stato $\bar{x}$ si dice NON OSSERVABILE (o indistinguibile dallo stato nullo) in k passi se da $x(0) = \bar{x}$ si genera l'uscita:

$$y(0) = y(1) = y(2) = \dots = y(k-1) = 0$$

Chi sono gli stati non osservabili?

$$x_\ell(k) = A^k x(0)$$
$$y_\ell(k) = C \cdot A^k x(0)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= C \cdot x(0) \\ y(1) &= CA\,x(0) \\ y(2) &= CA^2 x(0) \\ &\vdots \\ y(k-1) &= CA^{k-1} \cdot x(0) \end{aligned} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}}_{kp \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}}_{kp \times n} \underbrace{x(0)}_{n \times 1}$$

La matrice $\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$ si dice MATRICE DI OSSERVABILITÀ in k passi.

L'insieme degli stati ~~non~~ osservabili in k passi è dato da

$$\mathcal{X}_k^{no} = \ker \mathcal{O}_k$$

(sono gli $\bar{x}$ tali che $\mathcal{O}_k \bar{x} = \phi$)

$$\mathcal{X}_1^{no} \supseteq \mathcal{X}_2^{no} \supseteq \mathcal{X}_3^{no} \dots \supseteq \mathcal{X}_h^{no} \supseteq \mathcal{X}_{h+1}^{no} \dots$$

Per il teorema di Caley-Hamilton

$$A^n = \alpha_{n-1} A^{n-1} + \alpha_{n-2} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

e quindi

$$CA^n = \alpha_{n-1} CA^{n-1} + \alpha_{n-2} CA^{n-2} + \dots + \alpha_1 CA + \alpha_0 C$$

perciò

$$\mathcal{X}_n^{no} = \mathcal{X}_{h}^{no} \qquad \forall\, h \geq n$$

La matrice

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

si dice MATRICE DI ~~RAGGIUNGI~~ OSSERVABILITÀ del sistema

e $\mathcal{X}^{no} = \ker \mathcal{O}$ è lo spazio degli stati stati non ~~raggiungibili~~ osservabili.

Se rank $\mathcal{O} = n$, allora $\ker \mathcal{O} = \{\emptyset\}$ e il sistema si dice COMPLETAMENTE OSSERVABILE.

Se il sistema è completamente osservabile, è possibile risalire allo stato iniziale $x(\emptyset)$ a partire dalle prime n uscite $y(\emptyset), y(1), \dots, y(n-1)$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix}}_{\substack{pn \times 1 \\ Y}} = \mathcal{O} \cdot \underbrace{x(\emptyset)}_{n \times 1}$$

Se il sistema non è completamente osservabile, il sistema lineare $Y = \mathcal{O} \cdot x(\emptyset)$ ammette infinite soluzioni del tipo

$$x(\emptyset) = \bar{x} + x_{no}$$

dove $\bar{x}$ è una soluzione particolare di $Y = \mathcal{O} x(\emptyset)$ e $x_{no} \in \ker \mathcal{O}$.

Nel caso di sistemi con ingresso $u(k)$ (noto)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$y_{tot}(k) = CA^{k}x(0) + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} B u(i) + Du(k)}_{y_f(k) \text{ noto!}}$$

$$\underbrace{\begin{cases} y_{tot}(0) - y_f(0) = Cx(0) \\ y_{tot}(1) - y_f(1) = CAx(0) \\ \vdots \\ y_{tot}(n-1) - y_f(n-1) = CA^{n-1}x(0) \end{cases}}_{Y}$$

$Y \leftarrow$ applico la stessa idea del caso autonomo a questo vettore

Esempio

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \qquad n=2$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Studiare l'osservabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

se $\alpha \neq 0$ il sistema è completamente ~~raggiungibi~~ osservabile.

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \alpha \cdot x_2(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

se $\alpha = 0$, il sottospazio non osservabile è dato da

$$X^{NO} = \operatorname{Ker} \mathcal{O} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITÀ

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\dim \ker \mathcal{O} = \dim \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \sigma > 0$$

Sia $v_1, v_2, \dots v_\sigma$ una base di $X^{no} = \ker \mathcal{O}$

Si costruisca la matrice T non singolare

$$T = \Big[\underbrace{w_1 \,|\, w_2 \,|\, \cdots \,|\, w_{n-\sigma}}_{\text{in modo da completare la base di } \mathbb{R}^n} \,\Big|\, \underbrace{v_1 \,|\, v_2 \,|\, \cdots \,|\, v_\sigma}_{\text{base di } X^{no}}\Big]$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T$$
$$\bar{B} = T^{-1} B$$
$$\bar{C} = C T$$
$$\bar{D} = D$$

con la seguente struttura

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} A_\sigma & \emptyset \\ \hline A_{\sigma\bar{\sigma}} & A_{\bar{\sigma}} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\ n-\sigma \\ \}\ \sigma \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-\sigma} & \underbrace{\qquad}_{\sigma} \end{array} & \end{array}$$

$$\bar{B} = T^{-1} B = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} B_\sigma \\ B_{\bar{\sigma}} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\ n-\sigma \\ \}\ \sigma \end{array} \end{array}$$

$$\bar{C} = C T = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} C_\sigma & \emptyset \end{array}\right] & \}\ p \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-\sigma} & \underbrace{\qquad}_{\sigma} \end{array} & \end{array} \qquad \bar{D} = D$$

$$\bar{x}(k) = T^{-1} x(k) = \left[\begin{array}{c} \bar{x}_\sigma(k) \\ \bar{x}_{\bar{\sigma}}(k) \end{array}\right]$$

$$\bar{x}_o(k+1) = A_\sigma \cdot \bar{x}_o(k) + B_\sigma u(k)$$

$$\bar{x}_{\bar{o}}(k+1) = A_{\sigma\bar{o}} \bar{x}_o(k) + A_{\bar{\sigma}} \bar{x}_{\bar{\sigma}}(k) + B_{\bar{\sigma}} u(k)$$

$$y(k) = C_\sigma \bar{x}_\sigma(k) + D u(k)$$

$$\{\text{Autovalori di } A\} = \underbrace{\{\text{Autovalori di } A_o\}}_{\text{autovalori osservabili}} \cup \underbrace{\{\text{Autovalori di } A_{\bar{o}}\}}_{\text{autovalori non osservabili}}$$

(dinamica nello spazio non osservabile χ^{no})

Funzione di trasferimento

$$G(z) = \bar{C}(zI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_o & \emptyset \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} zI-A_o & \emptyset \\ \hline -A_{o\bar{o}} & zI-A_{\bar{o}} \end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D =$$

$$= \begin{bmatrix} C_o & \emptyset \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} (zI-A_o)^{-1} & \emptyset \\ \hline * & (zI-A_{\bar{o}})^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} C_o(zI-A_o)^{-1} & \emptyset \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D =$$

$$= C_o(zI-A_o)^{-1}B_o + D$$

Solo gli autovalori osservabili sono poli della funzione di trasferimento, quelli non osservabili si cancellano con altrettanti zeri.

<u>Risultato</u>. I poli della funzione di trasferimento sono tutti e soli gli autovalori raggiungibili <u>e</u> osservabili della matrice A.

Esempio

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} \mathcal{O} = L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{X}^{no}$$

Decomposizione di osservabilità:

$$T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \underbrace{0}_{\text{base di } \mathcal{X}^{no}} \end{array}\right] \rightarrow T^{-1} = T$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_o & \emptyset \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o \\ \hdashline B_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & \emptyset \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} C_o & \emptyset \end{array}\right]$$

$$G(z) = C(zI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z-\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & z-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1) & 0 & -2\left(z-\frac{1}{3}\right) \\ -(z-1) & \left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1) & -\frac{1}{3}\left(z-\frac{1}{2}\right)+2 \\ 0 & 0 & \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1) & 0 & -2\left(z-\frac{1}{3}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-1)} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)}(z-1) - 2\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)} + \left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{1}{3}\right)}(z-1)} =$$

$$= \frac{2z-\frac{7}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

Cancellazione dell'autovalore non osservabile $\lambda = \frac{1}{3}$

"Dualità"

Si dice che raggiungibilità e osservabilità sono concetti <u>duali</u>.

Siano (A, B, C, D) le matrici di un sistema Σ. Il sistema "duale" Σ_d è definito dalle matrici (A^T, C^T, B^T, D).

Il sistema Σ è completamente raggiungibile se e solo se il sistema Σ_d è completamente osservabile.
Il sistema Σ è completamente osservabile se e solo se il sistema Σ_d è completamente raggiungibile.

Σ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Σ_d

$$R = [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B] \qquad\qquad R_d = [C^T \; A^TC^T \; \dots \; (A^T)^{n-1}C^T]$$

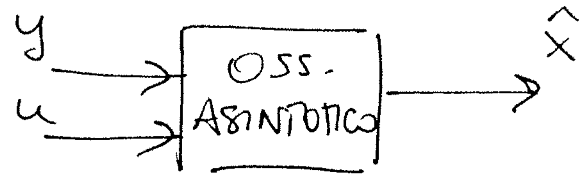
$$= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

OSSERVATORE ASINTOTICO DELLO STATO

Problema: determinare ad ogni istante k, una stima $\hat{x}(k)$ di $x(k)$, basata sulle uscite $y(0), y(1), \dots y(k-1), y(k)$, tale che

$$\lim_{k \to +\infty} \| x(k) - \hat{x}(k) \| = 0$$

$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ è l'errore di stima all'istante k



1. Osservatore asintotico ad anello aperto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) \text{ vero} \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) \qquad \hat{x}(0) \text{ stima iniziale}$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} -$$
$$- A\hat{x}(k) - \cancel{Bu(k)} = A(x(k) - \hat{x}(k)) = A\tilde{x}(k)$$

$$\tilde{x}(k+1) = A\tilde{x}(k) \qquad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

È un osservatore asintotico se e solo se il sistema è asintoticamente stabile (cioè A ha tutti autovalori interni al cerchio unitario)

2. Osservatore asintotico ad anello chiuso

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \underbrace{L}_{n\times p}\underbrace{(y(k) - C\hat{x}(k))}_{\text{errore di stima delle' uscita}}$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} -$$
$$- A\hat{x}(k) - \cancel{Bu(k)} - L(y(k) - C\hat{x}(k)) =$$
$$= Ax(k) - A\hat{x}(k) - L(Cx(k) - C\hat{x}(k)) =$$
$$= A(x(k) - \hat{x}(k)) - LC(x(k) - \hat{x}(k)) =$$
$$= (A - LC)(x(k) - \hat{x}(k)) = (A - LC)\tilde{x}(k)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x}(k+1) = (\underbrace{A}_{n\times n} - \underbrace{L}_{n\times p}\underbrace{C}_{p\times n})\tilde{x}(k)$$

È possibile scegliere L in modo da allocare arbitrariamente gli autovalori di A-LC?

Risultato. Se la coppia (A, C) è completamente osservabile, per ogni insieme di autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ dati, esiste una matrice L tale che

$$\det(\lambda I - A + LC) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$$

Se il sistema non è completamente osservabile, dalla decomposizione di osservabilità si ha

$$x_o(k+1) = A_o x_o(k) + B_o u(k)$$
$$x_{\bar{o}}(k+1) = A_{o\bar{o}} x_o(k) + A_{\bar{o}} x_{\bar{o}}(k) + B_{\bar{o}} u(k)$$
$$y(k) = C_o x_o(k)$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L_o \\ \hline L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n-\sigma \\ \}\, \sigma \end{matrix}$$

$$\bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} A_o & \emptyset \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_o & \emptyset \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_o - L_o C_o & \emptyset \\ \hline A_{o\bar{o}} - L_{\bar{o}} C_o & A_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

La matrice L non è in grado di modificare gli autovalori della parte non osservabile.

Risultato: se la coppia (A, C) non è completamente osservabile, è possibile costruire un osservatore asintotico se e solo se gli autovalori non osservabili sono asintoticamente stabili. In tal caso il sistema si dice RIVELABILE.

Costruzione della matrice L.

$(A-LC)$ ha gli stessi autovalori di $(A-LC)^T$

$$(A-LC)^T = A^T - C^T \cdot L^T = A_d + B_d F_d$$

$$A_d = A^T$$
$$B_d = C^T$$
$$F_d = -L^T$$

Algoritmo

1) Determinare F_d in modo da allocare gli autovalori di $A^T + C^T F_d$ (con "place" o "acker")
2) Porre $L = -F_d^T$

Osservazione. La coppia (A, B) è stabilizzabile se e solo se la coppia (A^T, B^T) è rivelabile. La coppia (A, C) è rivelabile se e solo se la coppia (A^T, C^T) è stabilizzabile.

Caso Tempo - Continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Tutti i concetti visti valgono analogamente (a parte il concetto di osservabilità in k passi).

Uno stato $\bar{x}$ è ~~esse~~ non osservabile se

$$\bar{x} \in \ker \mathcal{O} = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

L'osservatore asintotico sarà

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L\left(y(t) - C\hat{x}(t)\right)$$

e il sistema è rivelabile se gli autovalori non osservabili di A hanno parte reale negativa.

Esempio

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Determinare un osservatore asintotico dello stato in modo che l'errore di stima $x(k)-\hat{x}(k)$ si annulli in tempo finito.

→ equivale a determinare L tale che $A-LC$ abbia tutti autovalori nulli (garantisce che $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$, qualunque sia $\hat{x}(\emptyset)$).

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad A-LC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-l_1 & 1 \\ -1-l_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A-LC)) = \lambda^2$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda-1+l_1 & -1 \\ 1+l_2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1+l_1)(\lambda-1)+1+l_2 =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2+l_1) + 1 - l_1 + 1 + l_2 = \lambda^2$$

$$\begin{cases} -2+l_1 = \emptyset \\ 2+l_2-l_1 = \emptyset \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} & l_1 = 2 \\ & l_2 = l_1 - 2 = \emptyset \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right)$$

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ \emptyset \end{bmatrix}\left(y(k) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{x}(k)\right)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + 2\left(y(k) - \hat{x}_1(k)\right) \\ \hat{x}_2(k+1) = -\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) \end{cases}$$

<u>Esempio</u>

Dato il sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

determinare, se possibile, un osservatore asintotico tale che l'errore di stima $x(k) - \hat{x}(k)$ converga a zero con modi del tipo p^k, con $|p| \leq \frac{1}{3}$.

Dalla decomposizione di osservabilità, avevamo visto:

A_o

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$A_{\bar{o}}$

Tramite la matrice L dell'osservatore asintotico, è possibile modificare gli autovalori osservabili $\frac{1}{2}$ e 1

$$\text{Autovalori di } A-LC = \{ \underset{\uparrow}{\lambda_1},\ \underset{\uparrow}{\lambda_2},\ \tfrac{1}{3} \}$$

posso allocarli!

$$A-LC = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

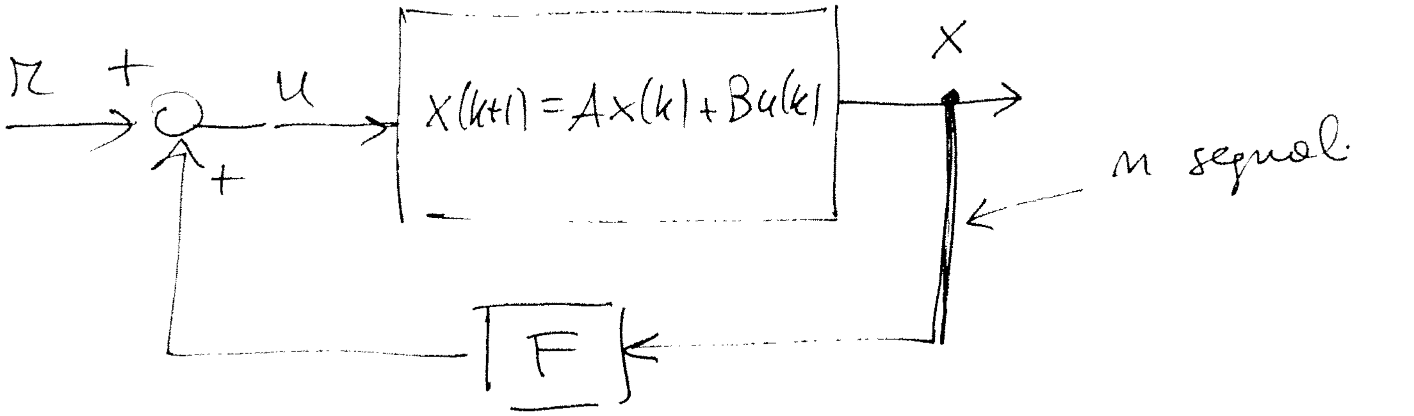
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-l_1 & 0 & -2-l_1 \\ -1-l_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}-l_2 \\ -l_3 & 0 & 1-l_3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\lambda I-(A-LC)\right) = \left(\lambda-\frac{1}{3}\right) \det\begin{pmatrix} \lambda-\frac{1}{2}+l_1 & 2+l_1 \\ l_3 & \lambda-1+l_3 \end{pmatrix}$$

→ tramite l_1 ed l_3 posso allocare gli autovalori λ_1 e λ_2 (al posto di quelli osservabili)

→ l'elemento l_2 è inutile (posso metterci qualunque valore)

Retroazione dello stato



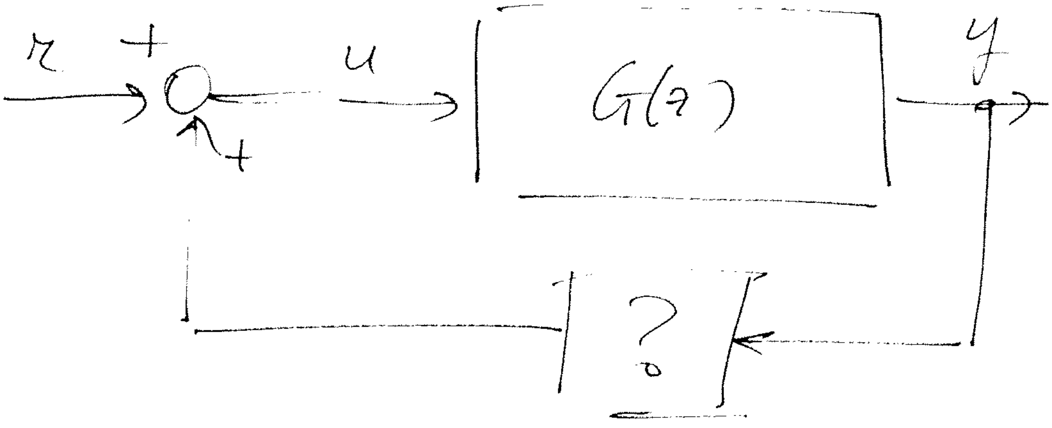
$$u(k) = r(k) + Fx(k) =$$

$$= r(k) + f_1 x_1(k) + f_2 x_2(k) + \dots + f_n x_n(k)$$

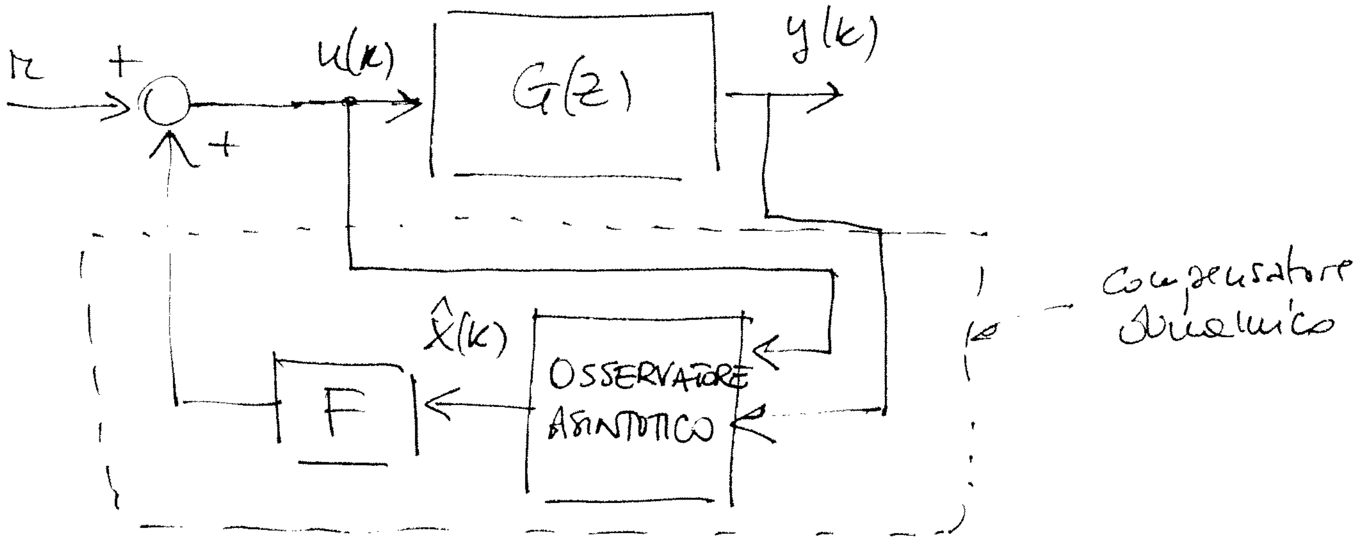
devo avere accesso a tutte le variabili di stato

Se non posso (o non voglio) misurare tutti gli stati, ma solo i segnali di uscita $y(k)=Cx(k)+Du(k)$, posso ancora modificare la dinamica del sistema?

Retroazione dell'uscita



COMPENSATORE DINAMICO



Idea: retroazione (statica) dello stato stimato dall'osservatore asintotico (dinamico!)

Sistema
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Osservatore
$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) \end{cases}$$

Retroazione
$$u(k) = r(k) + F\hat{x}(k)$$

Obiettivo: determinare una rappresentazione i/s/o del sistema complessivo

Vettore di stato esteso

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k) - \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \xi(k+1) &= \bar{A}\,\xi(k) + \bar{B}\,r(k) \\ y(k) &= \bar{C}\,\xi(k) \end{aligned}$$

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \qquad \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = Ax(k) + Br(k) + BF\hat{x}(k)$$
$$= Ax(k) + Br(k) + BF\left(x(k) - \tilde{x}(k)\right) =$$
$$= (A+BF)x(k) - BF\tilde{x}(k) + Br(k)$$

$$\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - A\hat{x}(k)$$
$$- \cancel{Bu(k)} + LC\hat{x}(k) - Ly(k) = Ax(k) - A\hat{x}(k)$$
$$- LCx(k) + LC\hat{x}(k) = A\tilde{x}(k) - LC\tilde{x}(k) =$$
$$= (A-LC)\tilde{x}(k)$$

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}$$

$$\xi(k+1) = \left[\begin{array}{c|c} A+BF & -BF \\ \hline \emptyset & A-LC \end{array}\right] \xi(k) + \begin{bmatrix} B \\ \emptyset \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & \emptyset \end{bmatrix} \xi(k)$$

{Autovalori del sistema complessivo} =
= {Autovalori di A+BF} ∪ {Autovalori di A−LC}

→ principio di separazione: la dinamica dell'osservatore è separata da quelle della retroazione

Il sistema è già in decomposizione di raggiungibilità: gli autovalori di A-LC sono non raggiungibili.

La funzione di trasferimento $W(z)$ da $r(k)$ a $y(k)$ è:

$$W(z) = C\left(zI - (A+BF)\right)^{-1} B$$

I poli di $W(z)$ coincidono con gli autovalori di $A+BF$.

La dinamica dell'osservatore non entra nella funzione di trasferimento (ma attenzione: influenza la risposta libera del sistema!)

$$\xi_\ell(k) = \begin{bmatrix} A+BF & -BF \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}^K \xi_\ell(\emptyset)$$

$$x(k+1) = (A+BF)x(k) - BF\tilde{x}(k)$$
$$\tilde{x}(k+1) = (A-LC)\tilde{x}(k)$$

Per questo motivo si tende a fare in modo che i modi di A-LC vadano a zero più velocemente di quelli di A+BF (se possibile!)