

Risposta di regime permanente a segnali sinusoidali

Se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa

$$u(t) = M \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$y_{\text{perm}}(t) = M \cdot |G(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \phi + \angle G(j\omega))$$

$\Rightarrow$ Studio di $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ in funzione di $\omega \in \mathbb{R}$

Motivazioni

1. Risposta di regime permanente a segnali sinusoidali di qualunque pulsazione ω

2. Se $f(t) = f(t+T) \quad \forall t$ (con $T > 0$)
(funzione periodica di periodo T)

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \underbrace{e^{j \frac{2\pi}{T} k t}}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} k t\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t\right)$$

3. Se $f(t)$ è un segnale generico, $\exists F(j\omega)$ tale che

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

4. Se $G(s)$ è una funzione razionale fratta, conoscere $G(j\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$, equivale a conoscere $G(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}$

DIAGRAMMI DI BODE

Rappresentazione grafica delle funzioni

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| & \text{ in funzione di } \omega & (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \\ \angle G(j\omega) & \end{aligned}$$

$$|G(-j\omega)| = |\overline{G(j\omega)}| = |G(j\omega)| \quad \text{funzione pari}$$

$$\angle G(-j\omega) = \angle \overline{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega) \quad \text{funzione dispari}$$

$\Rightarrow$ si possono disegnare per $\omega > 0$

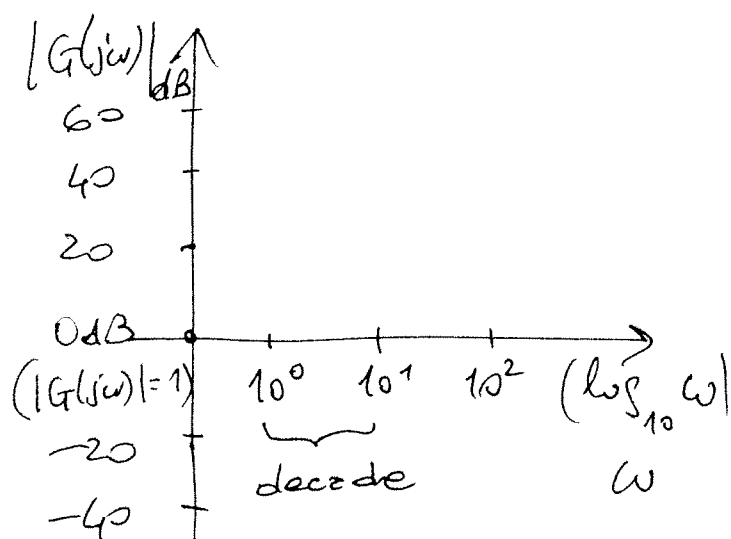
Scale

Diagramma del modulo

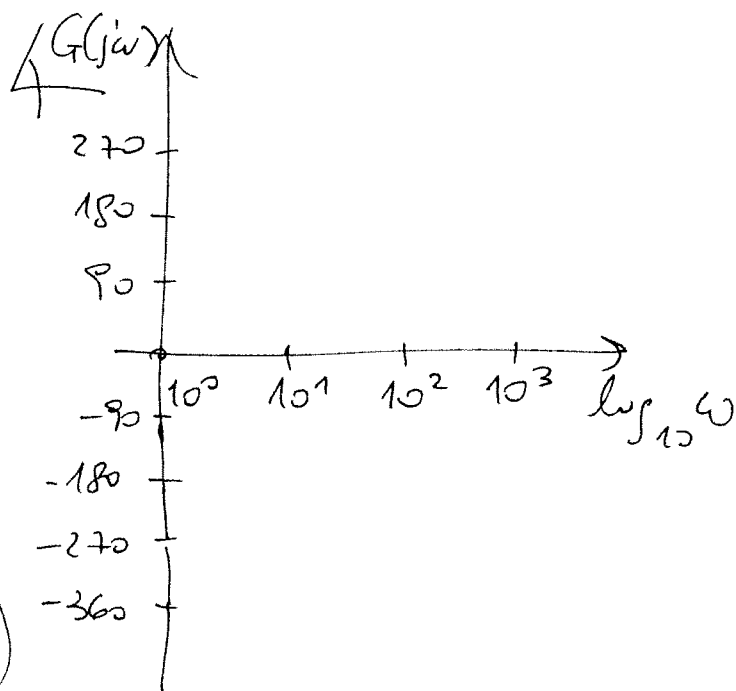
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad \text{vs.} \quad \log_{10} \omega$$

Diagramma della fase

$$\angle G(j\omega) \text{ in gradi} \quad \text{vs.} \quad \log_{10} \omega$$



$$-20 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{10} \right)$$



Funzioni razionali scritte in forma di Bode

$$G(s) = \frac{K_B}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{r_z} (1 + \hat{\tau}_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_z} \left(1 + 2 \frac{\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i} s + \frac{1}{\hat{\omega}_i^2} s^2\right)}{\prod_{i=1}^{r_p} (1 + \tau_i s) \cdot \prod_{i=1}^{c_p} \left(1 + 2 \frac{\zeta_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2\right)}$$

K_B : termine costante (guadagno di Bode)

s^g : ~~numero di poli in~~
termine monomio

$g = \#$ di poli in zero se $g > 0$

$-g = \#$ di zeri in zero se $g < 0$

$1 + \tau s$: termine binomio

r_z : # di zeri reali

$$\text{zero} = -\frac{1}{\hat{\tau}_i}$$

r_p : # di poli reali

$$\text{polo} = -\frac{1}{\tau_i}$$

$$\text{Es: } (s-3) = (-3)\left(1 - \frac{1}{3}s\right)$$

$$\begin{aligned} -3 &\rightarrow \text{dentro } K_B \\ \tau &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$1 + 2 \frac{\zeta}{\omega} s + \frac{1}{\omega^2} s^2$: termine trinomio

$|\zeta| < 1 \rightarrow$ coppia di radici complesse coniugate

c_z : # di coppie di zeri complessi coniugati

c_p : # di coppie di poli complessi coniugati

Idea di base per il disegno dei diagrammi:

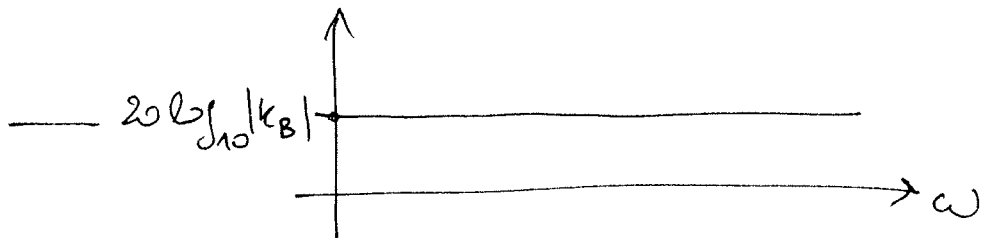
$$\log |a \cdot b| = \log |a| + \log |b|$$

$$\angle a \cdot b = \angle a + \angle b$$

$\Rightarrow$ Si possono sommare/sottrarre i diagrammi di modulo e fase dei singoli termini

1) Termine costante K_B

modulo: $|K_B|_{dB} = 20 \log_{10} |K_B|$



fase $\angle K_B = \begin{cases} 0 & \text{se } K_B > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$

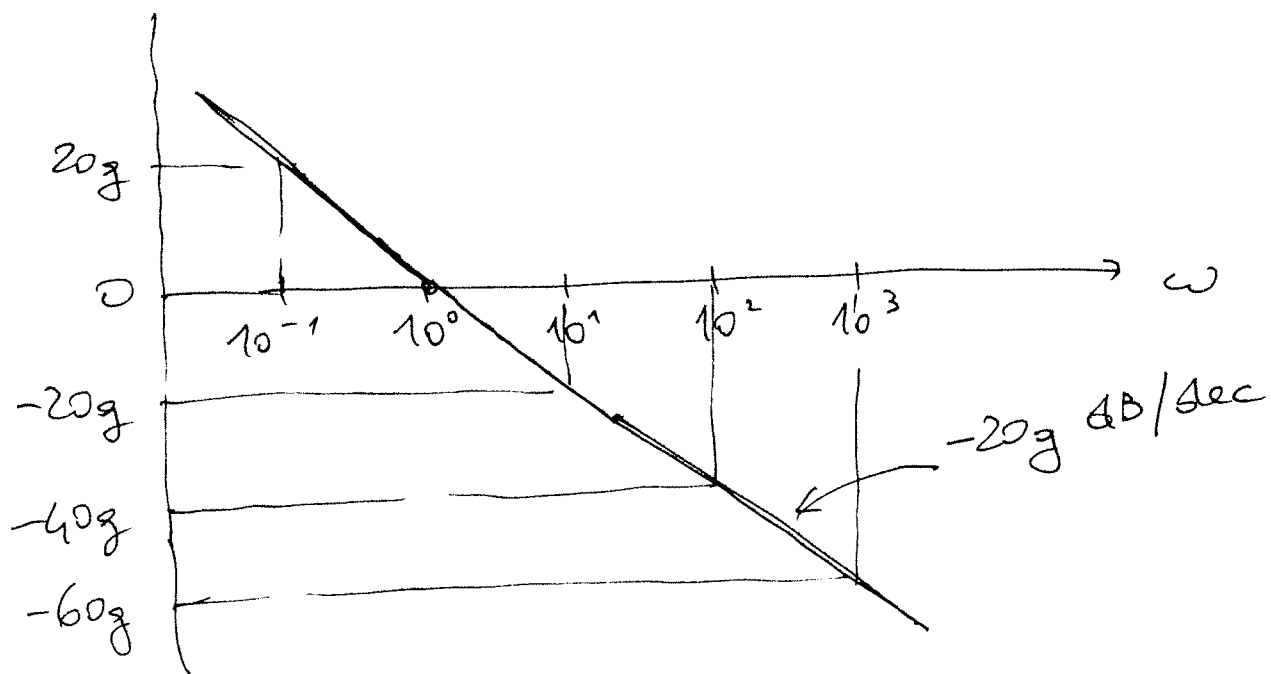
2) Termine monomio $\frac{1}{s^g}$

Modulo:

$$\left| \frac{1}{(j\omega)^g} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(j\omega)^g} \right| = 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} =$$

$$= 20 \log_{10} \frac{1}{\omega^g} = -20 \log_{10} \omega^g = -20g \log_{10} \omega$$

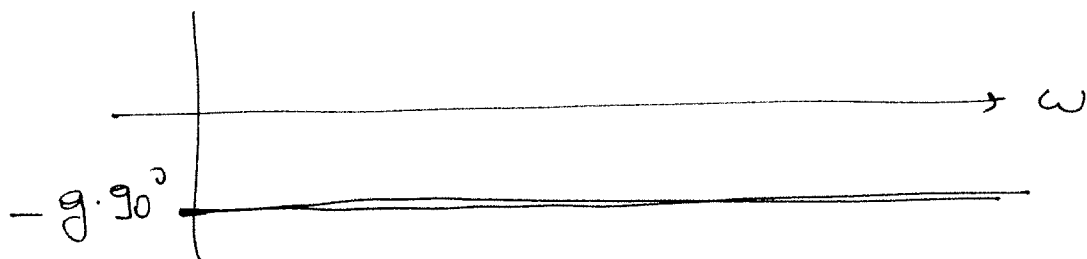
$\rightarrow$ rette con pendenza $-20g$



Se $g < 0 \rightarrow$ pendente positiva

Fase:

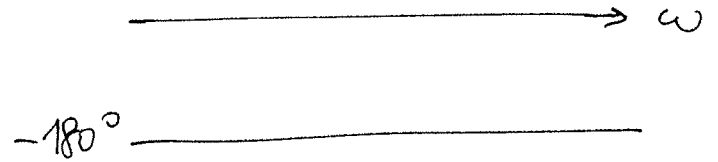
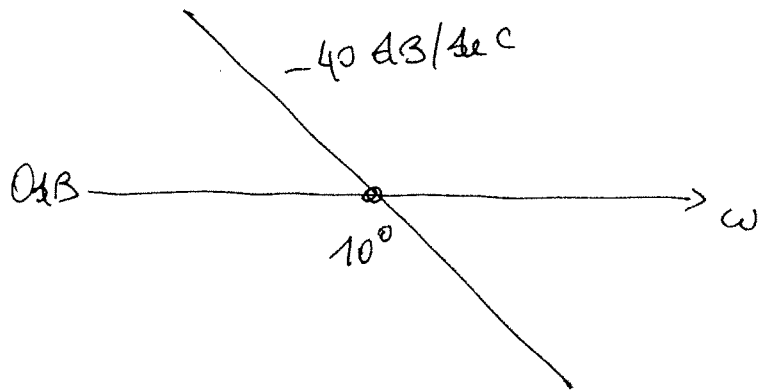
$$\angle \left(\frac{1}{(j\omega)^g} \right) = -\angle (j\omega)^g = -g \cdot \angle j\omega = -g \cdot 90^\circ$$



g poli in zero $\rightarrow -g \cdot 90^\circ < 0$ sfasamento negativo

h zero in zero $\rightarrow$ ~~$+h \cdot 90^\circ > 0$~~ sfasamento positivo
 $(g = -h) \quad -g \cdot 90^\circ = h \cdot 90^\circ$

Esempio : $G(s) = \frac{1}{s^2}$



$$y(t) = \iint u(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \cos(\omega t)$$

$$y(t) = -\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega^2} \cos(\omega t - \pi)$$

$$20 \log_{10} \frac{1}{\omega^2} = -40 \log_{10} \omega$$

3) Termine binomiale

$$T(s) = 1 + s\tau$$

$$\tau \in \mathbb{R}$$

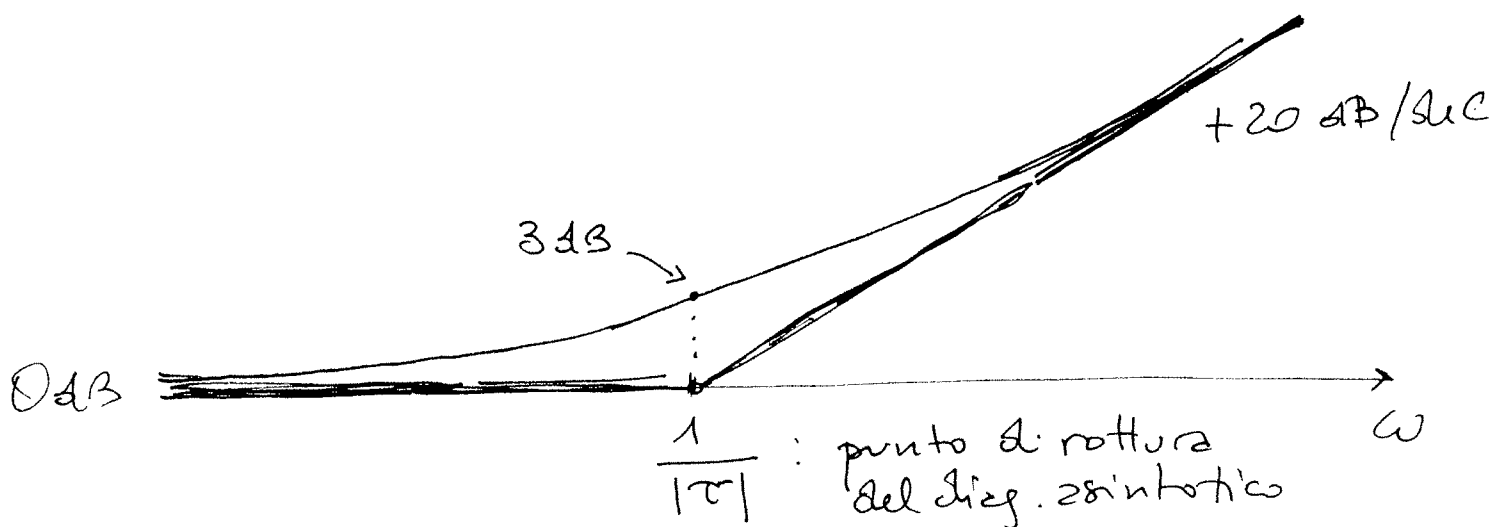
Modulo

$$|T(j\omega)| = |1 + j\omega\tau|$$

$$\begin{aligned} |T(j\omega)|_{dB} &= 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = \\ &= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \end{aligned}$$

$$\text{se } \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} \text{se } \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} &\simeq 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 \tau^2} = \\ &= 20 \log_{10} \omega |\tau| = \\ &= 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| \end{aligned}$$



$$20 \log_{10} \frac{1}{|\tau|} + 20 \log_{10} |\tau| = 0 \text{ dB}$$

Spunete $\rightarrow$ asintotico di $|T(j\omega)|_{dB}$

Zero reale : pendenza di $+20 \text{ dB/Dec}$ e destra
in $-\frac{1}{\tau}$ del polo si rotura $\frac{1}{|\tau|}$

polo reale : pendenza di -20 dB/Dec e destra
in $-\frac{1}{\tau}$ del polo si rotura $\frac{1}{|\tau|}$

Fase

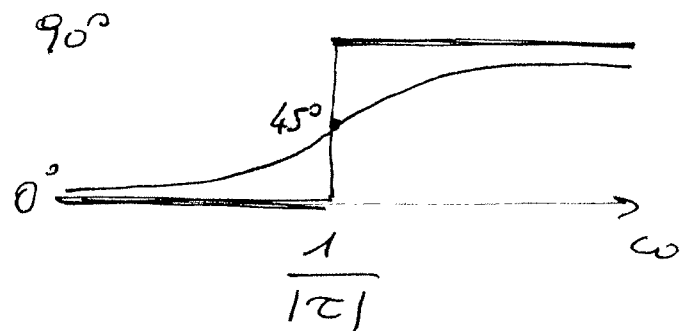
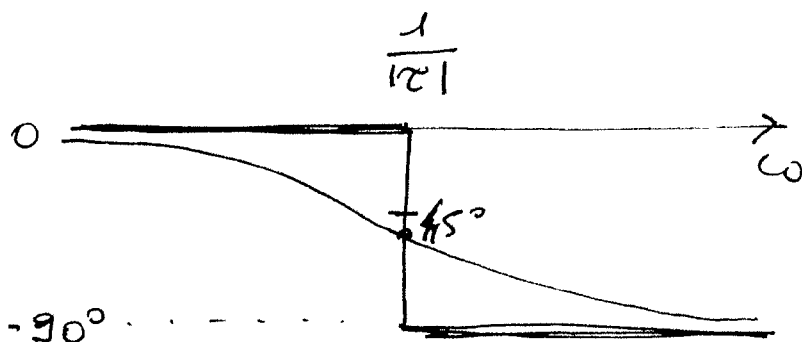
$$\angle 1 + j\omega\tau = \arctan(\omega\tau)$$

$$\omega \ll \frac{1}{|\tau|} \rightarrow \angle 1 + j\omega\tau \approx 0^\circ$$

$$\omega \gg \frac{1}{|\tau|} \rightarrow \angle 1 + j\omega\tau \approx \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } \tau > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \tau < 0 \end{cases}$$

$$\tau \leq 0$$

$$\tau > 0$$



→ Guadagno di 90° a destra del punto di rotture per zeri ^{reali} negativi e poli ^{reali} positivi

→ Perdita di 90° a destra del punto di rotture per zeri ^{reali} positivi e poli ^{reali} negativi

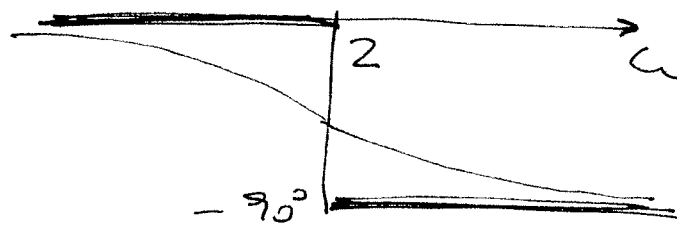
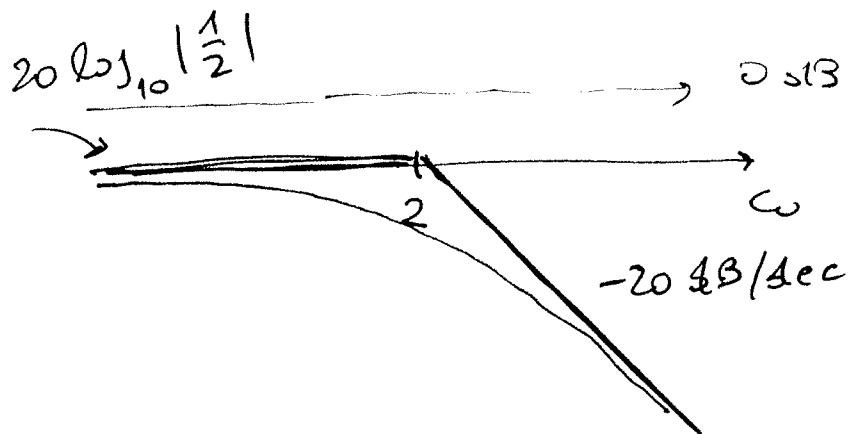
numeratore $\rightarrow 1 + \tau s \rightarrow$ zero $s = -\frac{1}{\tau}$

denominatore $\rightarrow 1 + s \tau \rightarrow$ polo $s = -\frac{1}{\tau}$

Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s+2} = \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}s)} = \frac{\frac{1}{2} = K_B}{1 + \frac{1}{2}s}$$

punto di rotture: $\frac{1}{|\tau|} = 2$



4) Termine trinomio

$$T(s) = 1 + 2 \frac{z_i}{\omega_i} s + \frac{1}{\omega_i^2} s^2$$

$$\omega_i > 0 \\ |z_i| < 1$$

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= 1 + 2 \frac{z_i}{\omega_i} j\omega + \frac{1}{\omega_i^2} (-\omega^2) = \\ &= 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j \left(\frac{2z_i}{\omega_i} \omega \right) \end{aligned}$$

Modulo

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)^2 + \left(\frac{2z_i}{\omega_i} \omega\right)^2}$$

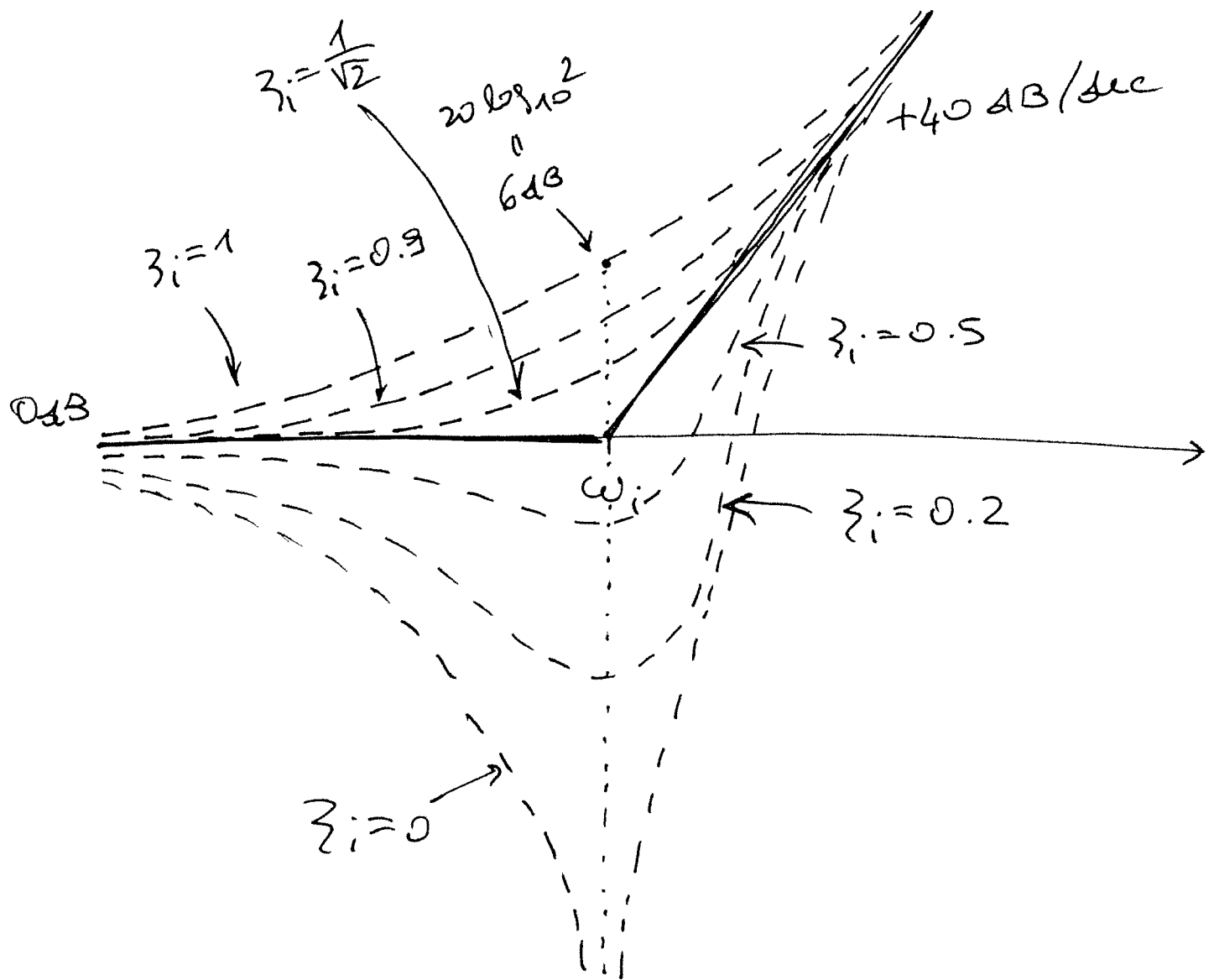
$$\omega \ll \omega_i \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_i \rightarrow |T(j\omega)|_{dB} &\cong 20 \log_{10} \frac{\omega^2}{\omega_i^2} = \\ &= 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_i \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\omega} |T(j\omega)|_{dB} = 0 \rightarrow \omega = \omega_i \sqrt{1 - 2z_i^2}$$

punto di minimo, che esiste se $1 - 2z_i^2 \geq 0$

$$\rightarrow |z_i| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$$



Caso particolare : se $\omega = \omega_i$ e $\zeta_i = 0$

abbiamo $|T(j\omega_i)| = 0 \Rightarrow -\infty$ in dB

radici complesse coniugate

$$s_{1,2} = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$$

$\zeta_i = \pm 1 \rightarrow$ due radici reali coincidenti in $\mp \omega_i$

$\zeta_i = 0 \rightarrow$ due radici immaginarie pure in $\pm j \omega_i$

Contributo al modulo del termine trinomio

- * retta di pendenza $+40 \text{ dB/dec}$ è destra del punto di rotura ω_i per una coppia di zeri complessi coniugati
- * retta di pendenza -40 dB/dec è destra del punto di rotura ω_i per una coppia di poli complessi coniugati
- * attenzione a $|\zeta_i|$ nel disegno del diagramma vero!

Fase

$$\angle 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} \right) =$$

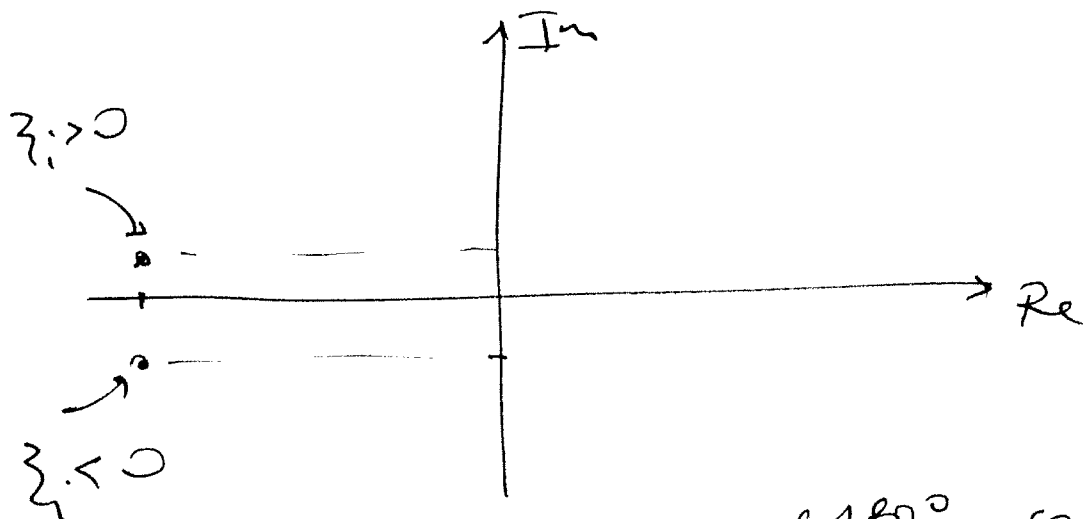
$$= \arctan \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}$$

se $\omega \ll \omega_i \rightarrow \angle T(j\omega) \approx 0^\circ$

se $\omega \gg \omega_i \rightarrow \angle T(j\omega) \approx \arctan \frac{2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i}}{-\frac{\omega^2}{\omega_i^2}} =$

$$= \arctan \left(-\frac{2\zeta_i}{\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)} \right)$$

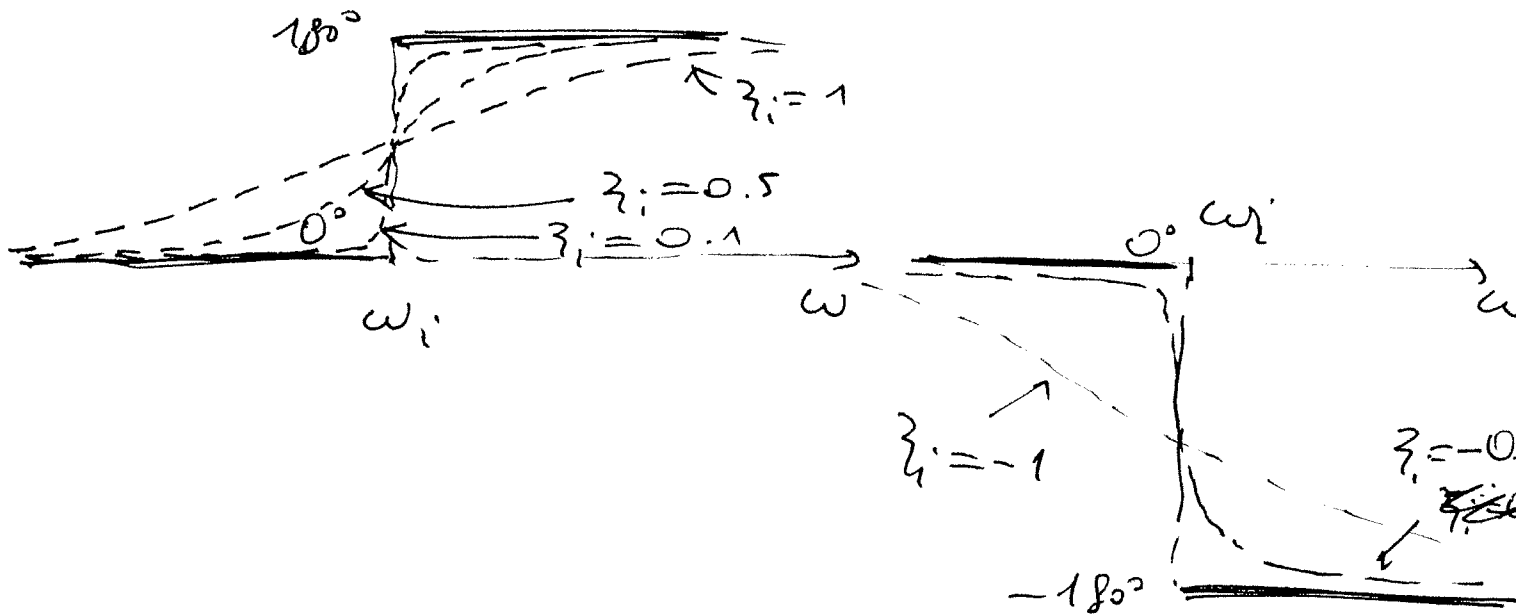
se $\omega \gg \omega_i \rightarrow \angle T(j\omega) \approx \angle -\frac{\omega^2}{\omega_i^2} + j \left(2\zeta_i \frac{\omega}{\omega_i} \right)$



se $\omega \gg \omega_i \quad \angle T(j\omega) = \begin{cases} 180^\circ & \text{se } \zeta_i > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \zeta_i < 0 \end{cases}$

$$\zeta_i > 0$$

$$\zeta_i < 0$$



Per $\zeta_i = 0$ ho $\angle T(j\omega) = \angle 1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \rightarrow$

$\rightarrow$ i diagrammi asintotici sono esatti!

$\rightarrow$ zeri a parte reale negativa e poli a parte reale positiva $\Rightarrow +180^\circ$ a destra di ω_i

$\rightarrow$ zeri a parte reale positiva e poli a parte reale negativa $\rightarrow -180^\circ$ a destra di ω_i

REGOLE DI TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI DI BODE

MODULO

- * Si parte dal termine $\frac{K_B}{s^q}$ che corrisponde a una retta di pendenza $-20q$ dB/dec e che passa per il punto $\omega=1$, $1 \cdot 1 \text{ dB} = 20 \log_{10}(1K_E)$
- * Si riportano in ascissa i punti di rotture pari a $\frac{1}{|\tau_i|}$ per i termini binomio e ω_i per i termini trinomio
- * Partendo da sinistra, in corrispondenza dei punti di rotture, si varia la pendenza di:
 - *) $+20\mu$ dB/dec $\forall$ zero reale di molteplicità μ
 - *) -20μ dB/dec $\forall$ polo " " " "
 - *) $+40\mu$ dB/dec $\forall$ coppia di zeri complessi coniugati di molteplicità μ
 - *) -40μ dB/dec $\forall$ coppia di poli " " " "

FASE

- * Si parte con una semiretta orizzontale da $\omega \equiv -\infty$ (sinistra) fino al primo punto di rottura, di valore pari a

$$\angle \frac{K_B}{(j\omega)^q} = \begin{cases} -90^\circ \cdot q & \text{se } K_B > 0 \\ -90^\circ \cdot q - 180^\circ & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

- * Si ~~tracciano~~ riportano gli stessi punti di rottura del diagramma del modulo
- * In corrispondenza dei punti di rottura, si rende la fase di:

★) $+90^\circ$ per ogni zero reale negativo o polo reale positivo di mult. μ

★) -90° per ogni polo reale negativo o zero reale positivo di mult. μ

★) $+180^\circ$ per ogni coppia di zeri complessi a parte reale negativa o poli complessi a parte reale positiva di mult. μ

★) -180° per ogni coppia di poli complessi a parte reale negativa o zeri complessi a parte reale positiva di mult. μ

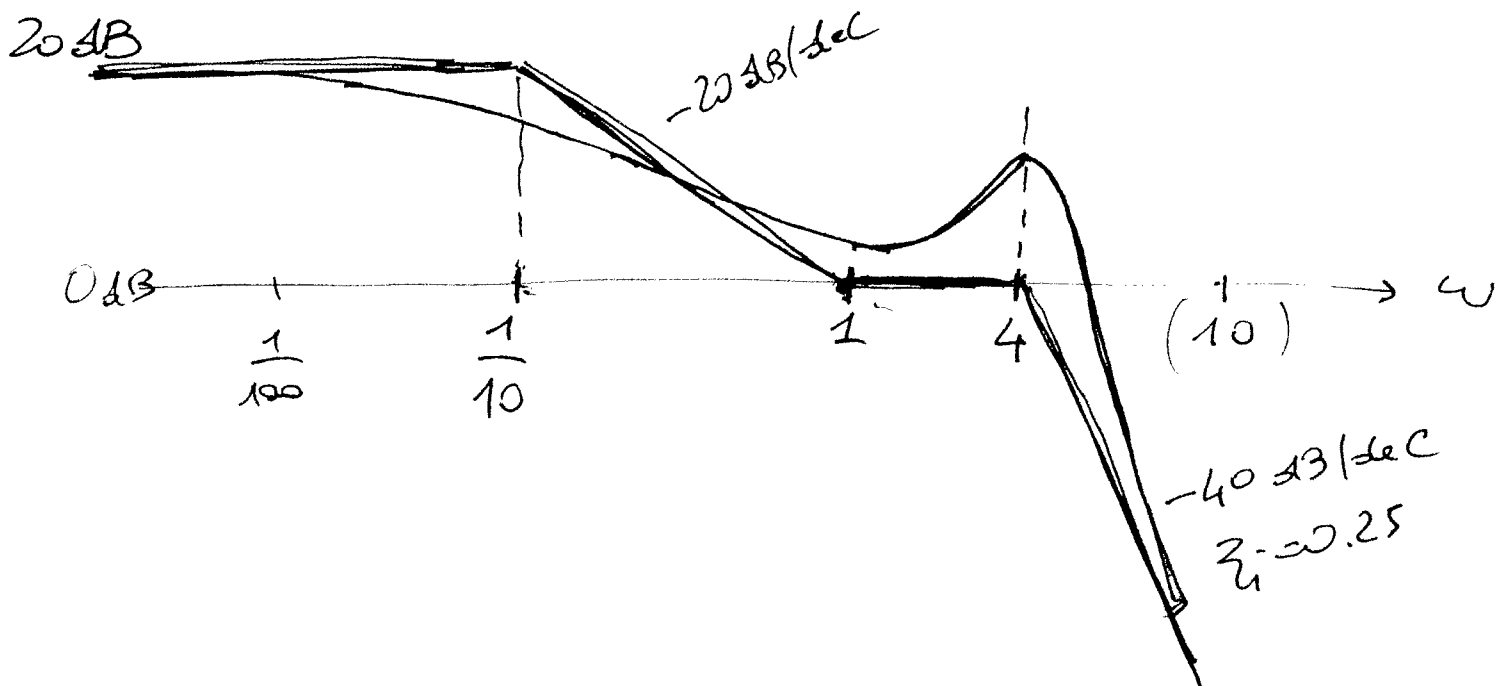
Exempu

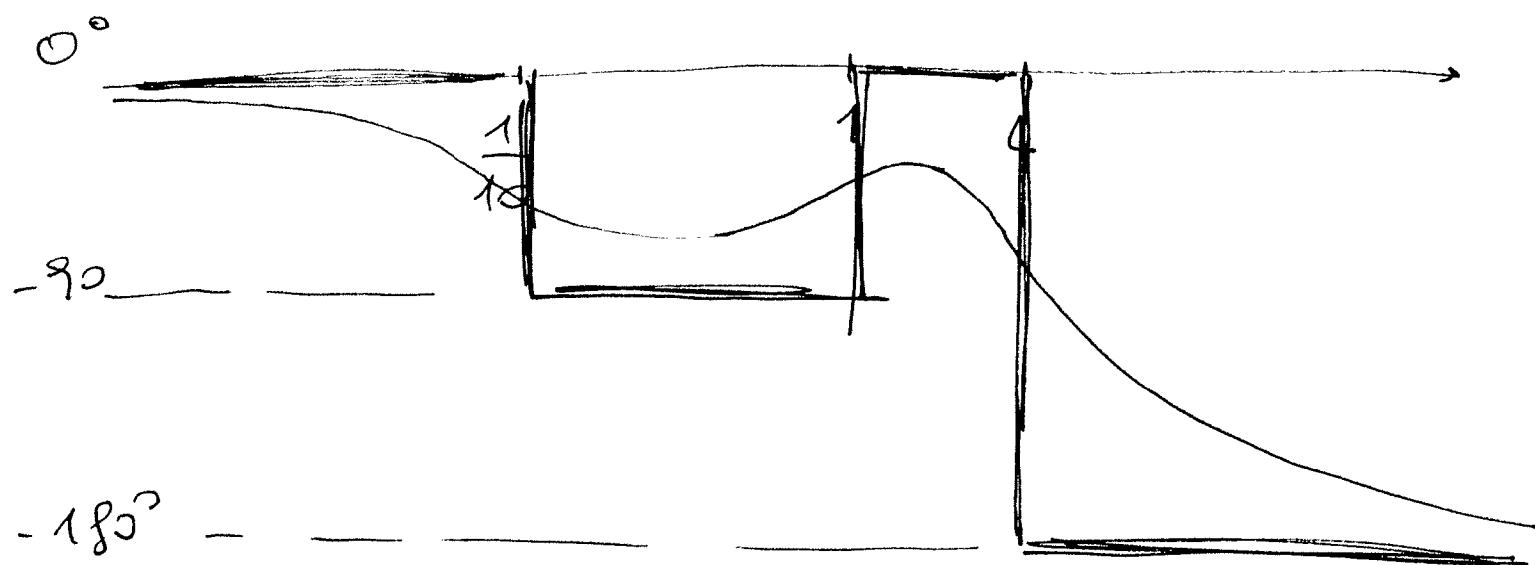
$$G(s) = \frac{16(s+1)}{(s+0.1)(s^2+2s+16)} =$$

$$= \frac{16(1+s)}{0.1(1+10s) \cdot 16\left(1 + \frac{2}{16}s + \frac{1}{16}s^2\right)} =$$

$$= \frac{k_B \cdot 10(1+s) \leftarrow \hat{\tau}_1 = 1}{(1+10s) \left(1 + \frac{2 \cdot 0.25}{4}s + \frac{1}{(4)^2}s^2\right)}$$

$\tau_1 = 10$ $\boxed{4}$ $\leftarrow \begin{matrix} \zeta_i = 0.25 \\ \omega_i = 4 \end{matrix}$
 $\uparrow 2 \cdot \frac{\zeta_i}{\omega_i}$





Esempio

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s^2(s+5)} = \frac{10(-1)(1-s)}{s^2(5)(1+\frac{1}{5}s)} =$$

$$= \frac{-2}{s^2} \frac{(1+(-1) \cdot s)}{(1+\frac{1}{5}s)}$$

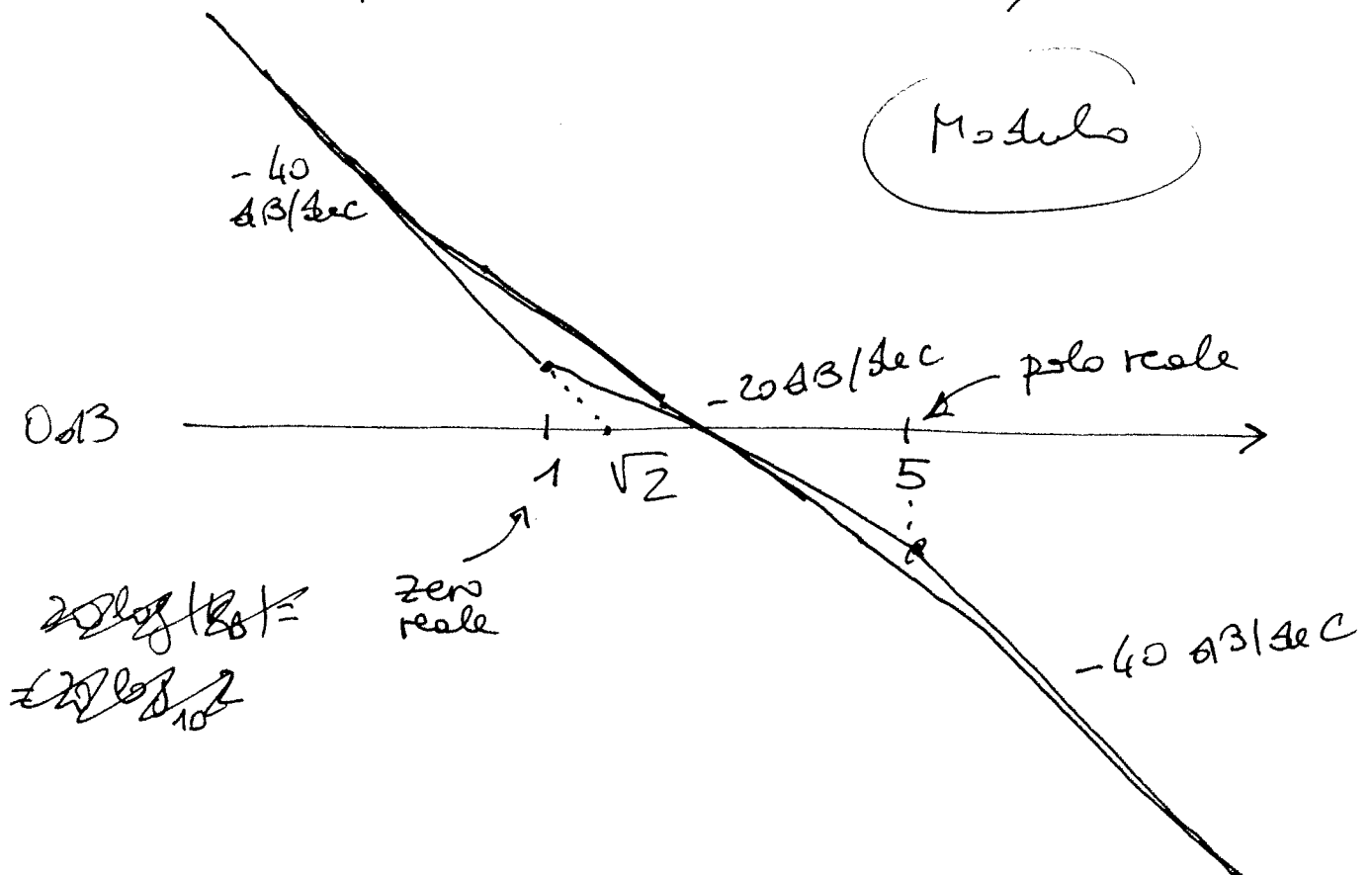
$$K_B = -2$$

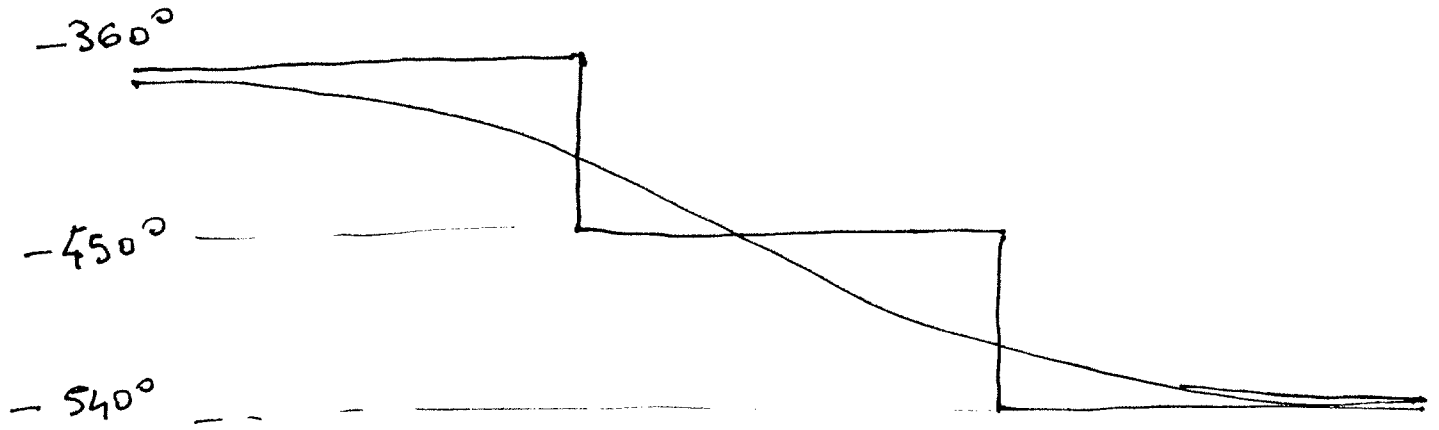
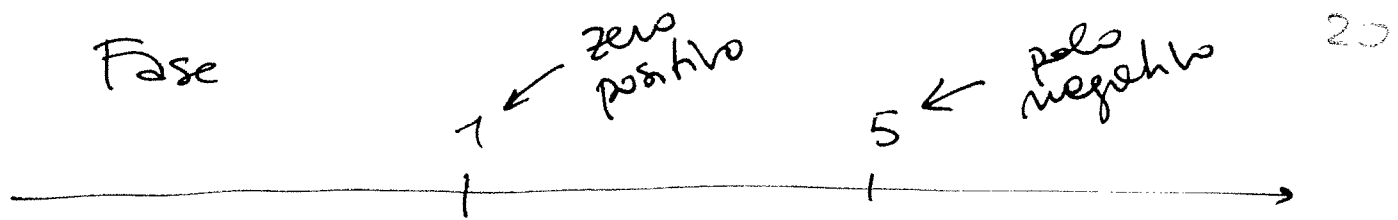
termini monomiali : $g=2$

termini binomiali : $\hat{\tau}_1 = -1$, $\tau = \frac{1}{5}$

$\hookrightarrow$ poli di rotture : 1 , 5

Modulo





ANALISI DEI SISTEMI NON LINEARI : TECNICA DI LINEARIZZAZIONE

21

Rapp. i/s/o

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

f, h : funzioni non lineari

$\bar{x}(0)$
 $\bar{u}(t)$ moti $\rightarrow$ $\bar{x}(t)$ sono soluzioni
 $\bar{y}(t)$ del sistema

Cioè
 $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ $\bar{x}(0)$ noto
 $\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$

Definiamo

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$$

$$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$$

sviluppo in serie

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x}(t) &= \frac{d}{dt} \Delta x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = f(x(t), u(t), t) - \\ &\quad - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = \\ &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \cdot (x(t) - \bar{x}(t)) + \\ &\quad + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \cdot (u(t) - \bar{u}(t)) + \mathcal{O}\left(\left\| \begin{matrix} x(t) - \bar{x}(t) \\ u(t) - \bar{u}(t) \end{matrix} \right\|^2\right) \\ &\quad - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\end{aligned}$$

Se $\Delta x(t)$ e $\Delta u(t)$ sono "piccoli"

$$\Delta \dot{x}(t) \cong \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}}_{A(t)} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}}_{B(t)} \cdot \Delta u(t)$$

Sistema linearizzato nell'intorno delle soluzioni $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$.

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}$$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}$$

Per l'equazione di uscita si ottiene

$$\Delta y(t) = C(t) \cdot \Delta x(t) + D(t) \Delta u(t)$$

$$\text{dove } C(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}} \quad \text{e} \quad D(t) = \frac{\partial h}{\partial u} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}(t) \\ u=\bar{u}(t)}}$$

Sistemi linearizzati (tempo-variante!)

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}(t) = A(t) \Delta x(t) + B(t) \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = C(t) \Delta x(t) + D(t) \Delta u(t) \end{cases}$$

.. idem per sistemi tempo-discreti!

$$\Delta x(k+1) = A(k) \cdot \Delta x(k) + B(k) \Delta u(k)$$

$$\Delta y(k) = C(k) \cdot \Delta x(k) + D(k) \Delta u(k)$$

Dove le matrici $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ sono definite nello stesso modo.

Il sistema linearizzato fornisce una buona approssimazione del comportamento del sistema non lineare di partenza nell'intorno delle soluzioni $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$, a patto che $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$, $\Delta y(t)$ restino "piccoli".

STATI DI EQUILIBRIO

2

$\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ si dice STATO DI EQUILIBRIO per un sistema dinamico se

$$x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq 0$$

Calcolo degli stati di equilibrio.

Sistema tempo-invariante a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$u(t) = \bar{u} \quad \forall t \text{ (costante)}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0}$$

Gli stati di equilibrio $\bar{x}$, relativi all'ingresso $\bar{u}$, sono tutte e sole le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

→ I sistemi lineari nell'intorno degli stati di equilibrio $\bar{x}, \bar{u}$ sono LTI!

Sistema tempo-invariante a tempo discreto

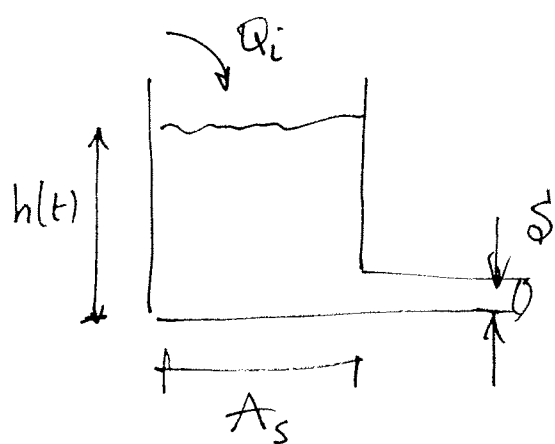
$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$u(k) = \bar{u} \quad \forall k \text{ (costante)}$$

$$\rightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

Gli stati di equilibrio $\bar{x}$, relativi all'ingresso $\bar{u}$, sono tutte e sole le soluzioni di $f(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{x} = 0$

Esempio: serbatoio



$$\dot{h}(t) = -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h(t)} + \frac{1}{A_s} Q_i(t)$$

Rapp. i/s/o

$$x(t) = h(t) = y(t)$$

$$u(t) = Q_i(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\left(\frac{S}{A_s} \sqrt{2g}\right) \cdot \sqrt{x(t)} + \frac{1}{A_s} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

non lineare

Stati di equilibrio

$$u(t) = \bar{u} \quad \forall t$$

$$\dot{\bar{x}} = 0 = -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{x}} + \frac{1}{A_s} \bar{u}$$

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$S \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\bar{x}} = \bar{u}$$

$$\sqrt{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{2g} \cdot S} \bar{u} \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\bar{u}^2}{S^2}$$

Sistema linearizzato

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x} = x(t) - \frac{1}{2g S^2} \bar{u}$$

$$\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}$$

$$\dot{\Delta x}(t) = A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t)$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \sqrt{x} + \frac{1}{A_s} u \right] \bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} =$$

$$= -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \frac{1}{2\sqrt{x}} \bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} =$$

$$= -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{2g} \cdot \frac{\bar{u}^2}{S^2}}} = -\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\bar{u}}{S}} =$$

$$= \left(-\frac{S^2 g}{A_s \bar{u}} \right)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \frac{\partial}{\partial u} \left[-\frac{S}{A_s} \sqrt{2g} \sqrt{x} + \frac{1}{A_s} u \right] = \frac{1}{A_s}$$

$$\boxed{\Delta \dot{x}(t) = \left(-\frac{S^2 g}{A_s \bar{u}} \right) \Delta x(t) + \frac{1}{A_s} \cdot \Delta u(t)}$$

$$\boxed{\Delta y(t) = \Delta x(t) \quad \rightarrow \text{modo: } e^{-\frac{S^2 g}{A_s \bar{u}} \cdot t}}$$

Simulationen $[A = 1 \text{ m}^2, S = 0.01 \text{ m}^2, \bar{u} = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}]$
 $\Rightarrow \bar{x} \approx 20.41 \text{ m}]$

case a) $\Delta u(t) = \pm 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ($u(t) \in [0.195 \div 0.205]$)

case b) $\Delta u(t) = \pm 0.05 \text{ m}^2/\text{s}$ ($u(t) \in [0.15 \div 0.25]$)

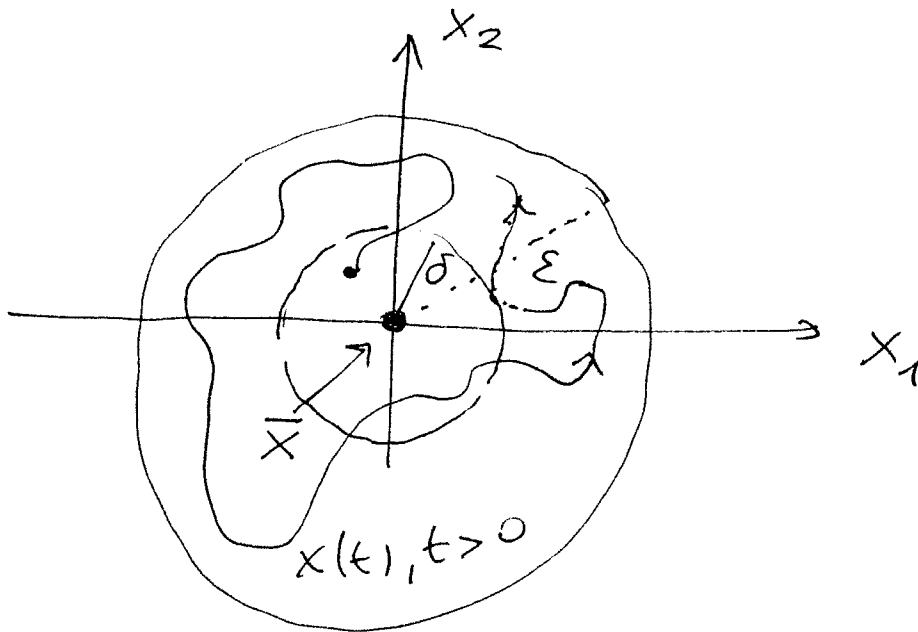
STABILITA'

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) \\ x(t+1) \end{array} \right\} = f(x(t), u(t)) \quad \begin{array}{l} (TC) \\ (TD) \end{array}$$

Definizione. Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice STABILE se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$



Definizione: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice CONVERGENTE se

$$\exists \delta > 0 : \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Definizione: Lo stato di equilibrio $\bar{x}$ si dice ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile che convergente

Osservazioni:

- * uno stato di equilibrio non stabile si dice INSTABILE
- * uno stato di equilibrio stabile ma non convergente si dice anche "MARGINALMENTE STABILE"
- * esistono stati di equilibrio convergenti, ma instabili

Esempio

$$x(k+1) = \begin{cases} 2 \cdot x(k) & \text{se } |x(k)| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x(k)| > 1 \end{cases}$$

Calcolo degli stati di equilibrio

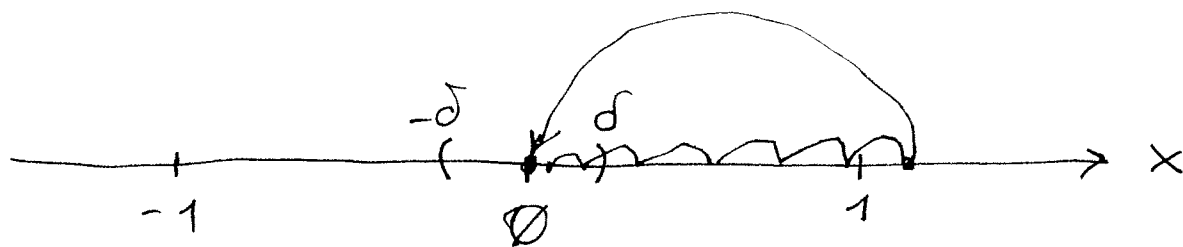
$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

$$\bar{x} = \begin{cases} 2\bar{x} & \text{se } |\bar{x}| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |\bar{x}| > 1 \end{cases}$$

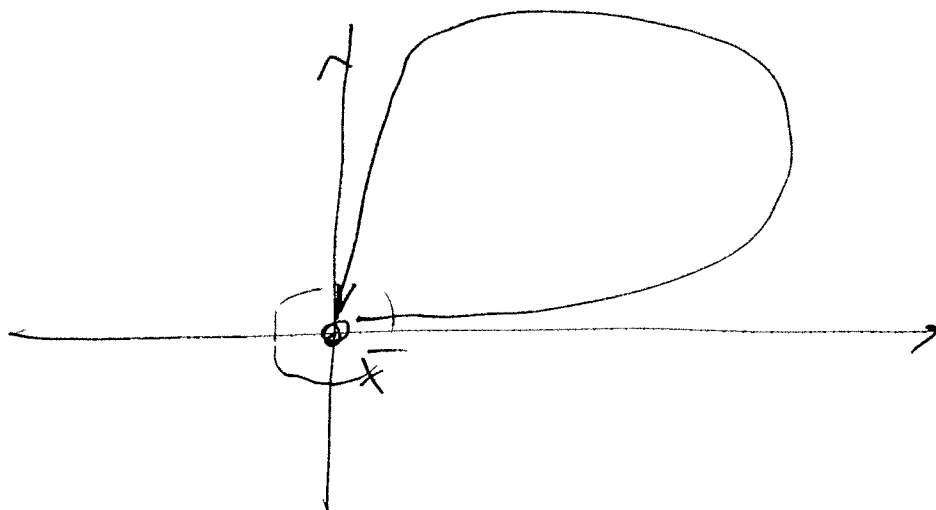
$$\bar{x} = 2\bar{x}$$

$$0 = 2\bar{x} - \bar{x}$$

$$\boxed{0 = \bar{x}} \rightarrow \text{unico S.d.E.}$$



Nel caso TC esistono esempi (con $n \geq 2$)



Definizione : Uno stato di equilibrio si dice
GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE (GAS)

se $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$

Esempio

$$\dot{x}(t) = -x(t)$$

$-\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$ è l'unico S.A.E.

$$x(t) = e^{-t} \cdot x(0)$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x}$ è GAS

CRITERIO RIDOTTO DI LYAPUNOV

Sia $\bar{x}$ uno stato di equilibrio del sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$$\text{Sia } A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}}$$

Il criterio ridotto di Lyapunov afferma che

- 1) Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa, $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio ASINTOTICAMENTE STABILE
- 2) Se esiste ~~un~~ almeno un autovalore di A a parte reale positiva (> 0), $\bar{x}$ è uno stato di equilibrio INSTABILE

Nei rimanenti casi non si può concludere nulla!

Esempio

Si considerino i 3 sistemi:

$$(a) \quad \dot{x}(t) = -x^3(t)$$

$$(b) \quad \dot{x}(t) = 0$$

$$(c) \quad \dot{x}(t) = x^3(t)$$

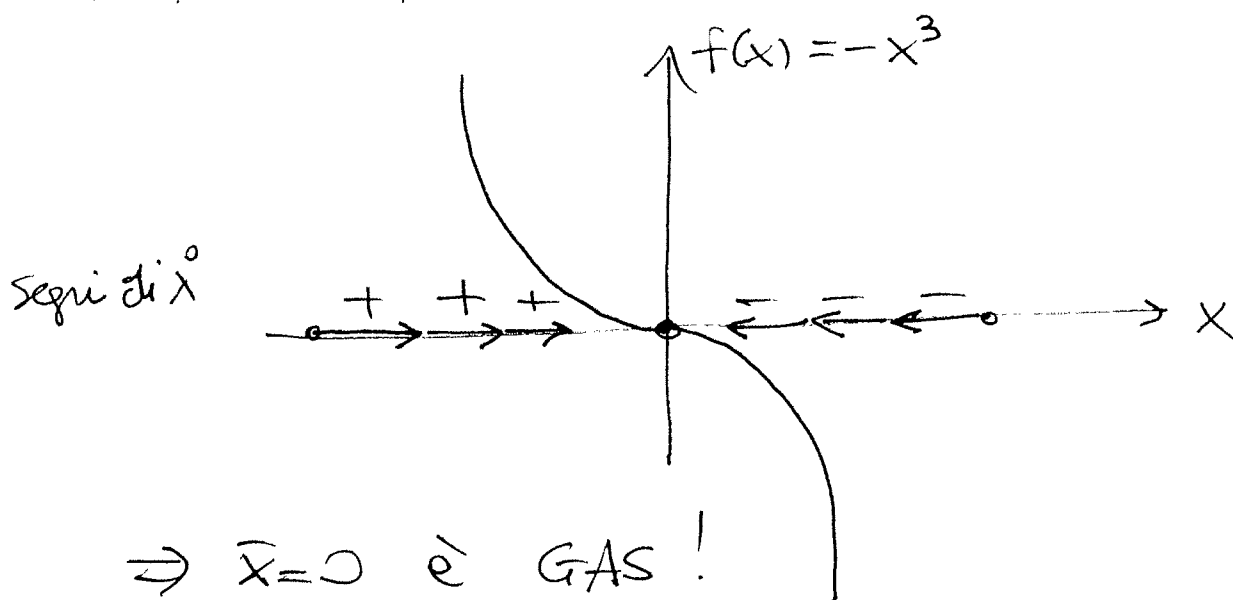
$\bar{x} = 0$ è stato di equilibrio per tutti e tre i sistemi

$$(a) \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}=0} = \left. \frac{\partial (-x^3)}{\partial x} \right|_{x=0} = -3x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

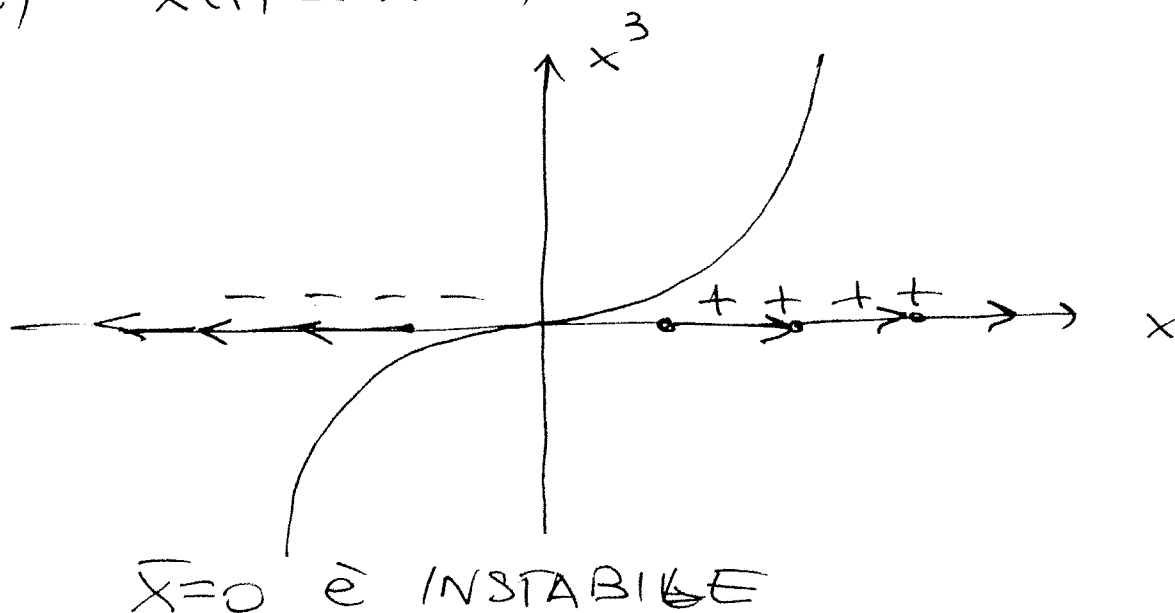
$$(b) \quad A = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

$$(c) \quad A = \left. \frac{\partial}{\partial x} x^3 \right|_{x=0} = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

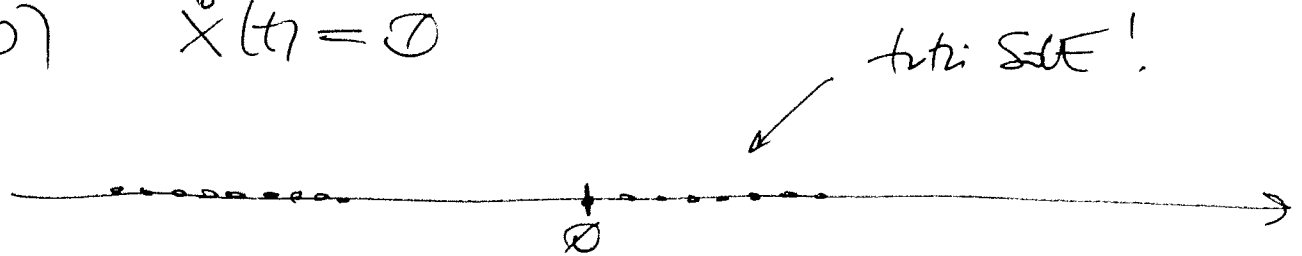
$$(a) \quad \dot{x}(t) = -x^3(t) = f(x(t))$$



$$(c) \quad \dot{x}(t) = x^3(t)$$



(b) $\dot{\bar{x}}(t) = 0$



$\bar{x}=0$ è MARGINALMENTE STABILE
(e anche tutti gli altri SdE!)

Versione TD del criterio ridotto di Lyapunov.

Sia $\bar{x}$, S.d.E. del sistema $x(k+1) = f(x(k))$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}}$$

- 1) Se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di 1, $\bar{x}$ è AS. STABILE
- 2) Se $\exists$ almeno un autovalore di A con modulo maggiore di 1, $\bar{x}$ è INSTABILE

Esempio: pendolo inverso

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = -\sin x_1(t) - \beta x_2(t) \quad \beta > 0$$

a) calcolare gli stati di equilibrio

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(x(t)) \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -\sin \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \sin \bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \text{fisicamente consideriamo} \quad \bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{x}_B = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) studiare la stabilità di $\bar{x}_A$ e $\bar{x}_B$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_A: A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + \beta \end{pmatrix} = \lambda^2 + \beta \lambda + 1$$

Se $\beta > 0 \Rightarrow$ 2 autovalori a parte reale negativa
 $\Rightarrow \bar{x}_A$ è SdE AS. STABILE

Se $\beta = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j \Rightarrow$ non posso concludere niente!

$$\bar{x}_B \quad A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \beta\lambda - 1$$

$\forall \beta$, 1 variabile di segno $\Rightarrow$ 1 radice a parte reale
positive

$\Rightarrow \bar{x}_B$ è INSTABILE

Esempio

$$x_1(k+1) = \beta x_1(k) + x_1(k)x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k)$$

Calcolare gli SdE e studiarne la stabilità al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \beta \bar{x}_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = -2\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_1 = \beta \bar{x}_1 + \bar{x}_1 (-2\bar{x}_1)$$

$$2\bar{x}_1^2 + (1-\beta)\bar{x}_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 &= \frac{\beta-1}{2} \rightarrow \bar{x}_2 = 1-\beta \end{aligned}$$

$$\bar{x}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{2} \\ 1-\beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \beta + x_2 & x_1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_A} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

se $|\beta| < 1 \rightarrow \bar{x}_A$ è AS. STABILE

se $|\beta| > 1 \rightarrow \bar{x}_A$ è INSTABILE

nei casi $\beta=1$ e $\beta=-1$ non posso concludere niente sulla stabilità di $\bar{x}_A$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_B = \begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{2} \\ 1-\beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta+1-\beta & \frac{\beta-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

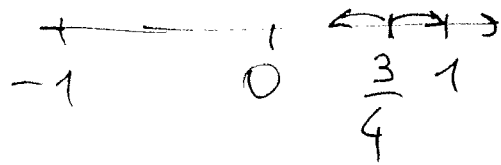
$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -\frac{\beta-1}{2} \\ 1 & \lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) + \frac{\beta-1}{2} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\beta-1}{2} =$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{\beta}{2}$$

$$\lambda = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2\beta}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4}$$

Case 1: $\underline{9-8\beta \geq 0}$



$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4} < 1$$

$$\sqrt{9-8\beta} < 1$$

$$9-8\beta < 1 \rightarrow \underline{\beta > 1} \rightarrow \beta \in (1, \frac{9}{8}]$$

$\bar{x}_B$ è AS. STABILE

Per $\beta < 1 \rightarrow \bar{x}_B$ è INSTABILE

Per $\beta = 1 \rightarrow$ non so!

Case 2: $9-8\beta < 0 \rightarrow \beta > \frac{9}{8}$

$$\lambda = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{9-8\beta}}{4} = \frac{3}{4} \pm j \frac{\sqrt{8\beta-9}}{4}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{8\beta-9}{16}} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} < 1$$

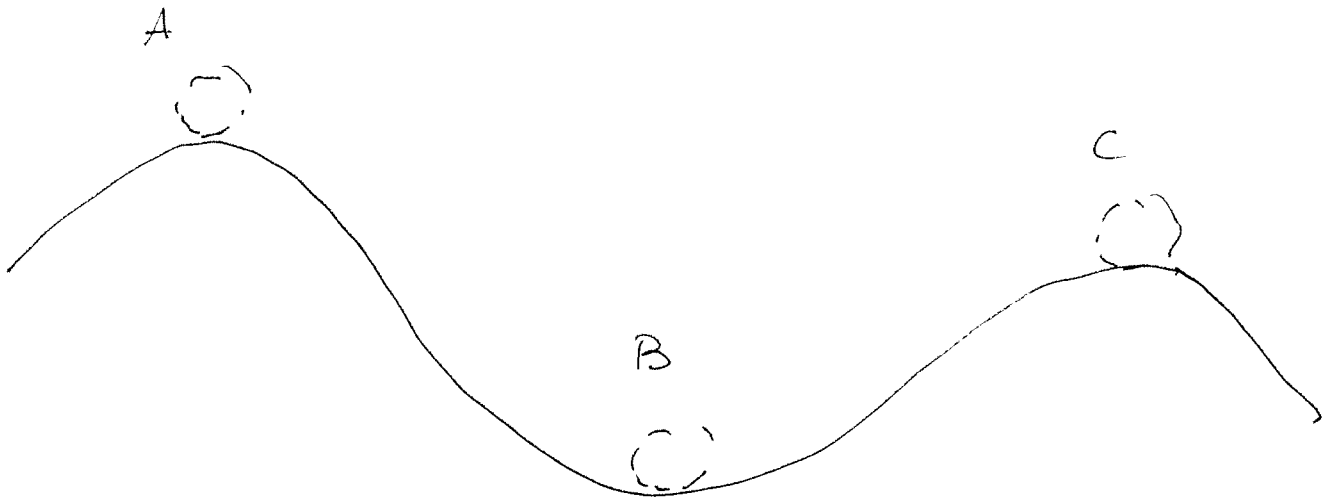
$$\rightarrow \beta < 2$$

$\bar{x}_B$ è AS. STABILE per $\beta \in [\frac{9}{8}, 2)$

" è INSTABILE per $\beta > 2$

Per $\beta = 2$ non so!

● palline



A, C : SdE instabile
 B : SdE asintoticamente (con attrito!) stabile

STABILITÀ NEI SISTEMI LINEARI

Sistemi autonomi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{TC}$$

$$x(k+1) = Ax(k) \quad \text{TD}$$

Calcolo degli SdE

$$\text{TC: } \bar{x}: \underline{A\bar{x} = 0} \rightarrow \bar{x} \in \ker(A)$$

se $\det A \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ è l'unico SdE

se $\det A = 0 \Rightarrow \exists$ infiniti SdE
(tra cui $\bar{x} = 0$)

$$\text{TD: } \bar{x}: \bar{x} = A\bar{x}$$

$$(I-A)\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} \in \ker(I-A)$$

$\bar{x} = 0$ è sempre SdE ed è l'unico se
e solo se $\det(I-A) \neq 0$

Stabilità:

$$\text{TC: } x(t) = e^{At} \cdot x(0)$$

la risposta libera!

$$\text{TD: } x(k) = A^k \cdot x(0)$$

Tutti i modi convergenti $\Rightarrow$ AS STABILE

Modi convergenti + modi limitati (con almeno un
modo limitato non convergente) $\Rightarrow$ MARGINALMENTE
STABILE

Almeno un modo divergente $\Rightarrow$ INSTABILE

TC : $\boxed{\lambda_i, i=1, \dots, n \text{ gl. aut. valori di } A}$

* $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0 \quad \forall i \Rightarrow$ sistema AS. STABILE

* $\operatorname{Re}[\lambda_i] \leq 0 \quad \forall i$ e se $\operatorname{Re}[\lambda_j] = 0 \Rightarrow m.\text{alg.}(\lambda_j) = m.\text{geo.}(\lambda_j)$
 $\Rightarrow$ sistema MARG. STABILE

* Nepl. alhi con $\Rightarrow$ sistema INSTABILE

TD :

* $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow$ AS. STABILE

* $|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall i$ + se $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow m.\text{alg.}(\lambda_i) = m.\text{geo.}(\lambda_i)$
 $\Rightarrow$ MARG. STABILE

* Nepl. alhi con $\Rightarrow$ INSTABILE

Osservazioni

1) $\bar{x} = 0$ è sempre SdE

2) Il sistema può essere ASINTOTICAMENTE STABILE solo se $\bar{x} = 0$ è l'unico SdE

3) Se $\bar{x} = 0$ è convergente allora è anche stabile (e quindi AS. STABILE)

4) Se $\bar{x} = 0$ è AS. STABILE allora è anche GLOBALMENTE AS. STABILE (!)

Esempio

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + \alpha x_2(t)$$

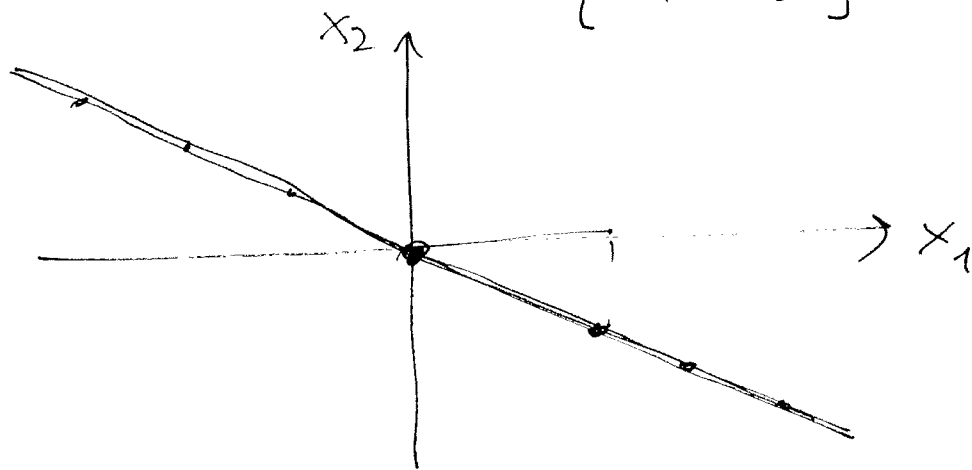
studiare la stabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} \in \ker A \quad \det A = -\alpha + 8$$

$\bar{x} = 0$ è l'unico SAE se $\alpha \neq 8$

$$\text{se } \alpha = 8 \quad \bar{x} \in \ker \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = L \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ -4 & \lambda - \alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda^2 + (1 - \alpha)\lambda + 8 - \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \alpha > 0 \\ 8 - \alpha > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha < 8 \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha < 1} \quad \text{AS. STABILE}$$

$$\boxed{\alpha > 1} \quad \text{INSTABILE}$$

$$\alpha = 1 \quad \lambda^2 + 7 = 0 \quad \lambda = \pm j\sqrt{7} \quad \boxed{\alpha = 1} \quad \text{MARG. STABILE}$$

Caso non autonomo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad u(t) = \bar{u} \quad \forall t$$

$\bar{x}$ è SdE se $A\bar{x} + B\bar{u} = 0$

$$A \cdot \bar{x} = \underbrace{-B\bar{u}}_b$$

se $\det A \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$ è l'unico SdE

se $\det A = 0 \Rightarrow \infty$ SdE se $B\bar{u} \in \text{Im}(A)$
 $\Rightarrow$ nessuno SdE se $B\bar{u} \notin \text{Im}(A)$

Esempio

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{u} \notin \text{Im} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{no SdE}$$

Quella vista finora è una nozione di stabilità definita nello spazio degli stati (aka STABILITÀ INTERNA)

Esiste anche una nozione di stabilità ingresso-uscita, nota come stabilità ILUL o BIBO

STABILITÀ ILUL (Ingresso Limitato Uscita Limitata)

Definizione: Un sistema si dice STABILE IN SENSO ILUL se

$$\forall \bar{U} > 0 \quad \exists \bar{Y} > 0 : \text{ se } \|u(t)\| < \bar{U} \quad \forall t \Rightarrow \\ \Rightarrow \|y(t)\| < \bar{Y} \quad \forall t$$

Sistemi LTI $\rightarrow$ Funzione di trasferimento!

TC:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$\forall$ polo di $G(s)$ a parte reale nulla, $\exists$ un ingresso ult. limitato che genera una $y(t)$ divergente

$\Rightarrow$ Il sistema è stabile in senso ILUL se e solo se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa

TD

Il sistema è stabile in senso ILUL se e solo se tutti i poli di $G(z)$ hanno modulo minore di 1.