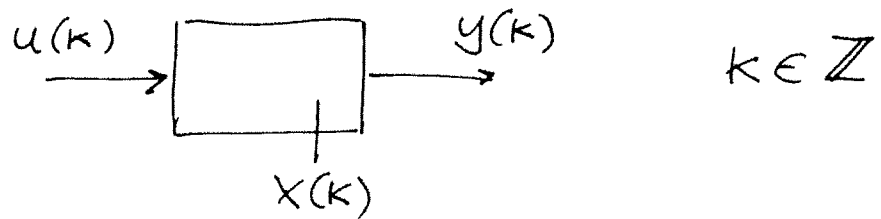


ANALISI DEI SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO



Rapp. i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

Rapp. i/s/o

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

Problemi

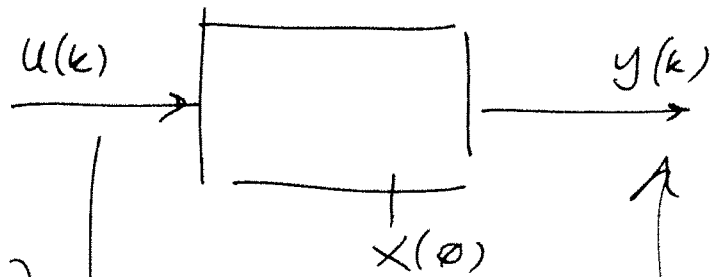
1) Rapp. i/o.

Conoscendo l'ingresso $u(k)$, $\forall k \geq 0$ e le condizioni iniziali $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$, determinare $y(k)$, $\forall k \geq 0$.

2) Rapp. i/s/o

Conoscendo l'ingresso $u(k)$ $\forall k \geq 0$ e le condizioni iniziali $x(0)$, determinare $x(k)$ e $y(k)$, $\forall k \geq 0$.

dominio
del
tempo



z

z^{-1}

dominio
della
trasformata
 z

$U(z)$



$Y(z)$

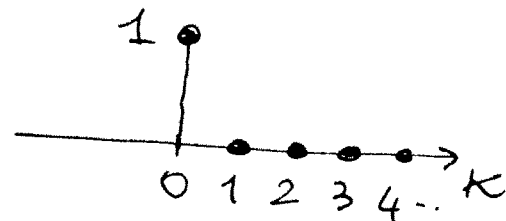
$z \in \mathbb{C}$

Segnali caratteristici a tempo discreto

$$u(k) = 0 \quad \forall k < 0.$$

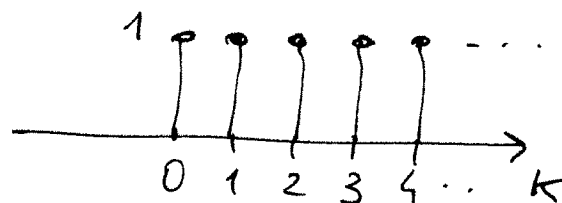
* impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$



* gradino unitario

$$\mathbb{1}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

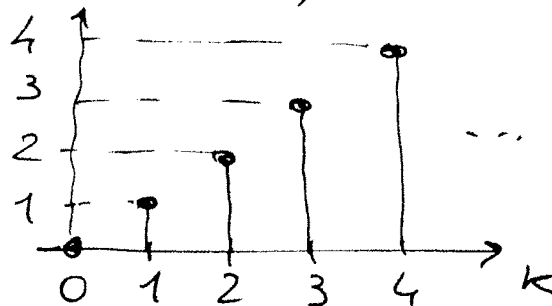


* segnali canonici

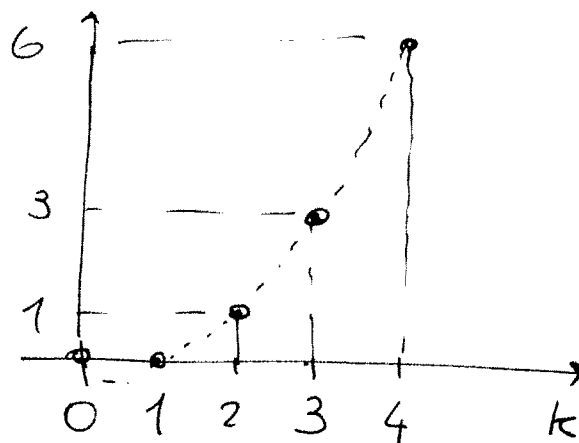
$$\pi_n(k) = \binom{k}{n} \cdot \mathbb{1}(k) = \frac{k!}{n! (k-n)!} \cdot \mathbb{1}(k)$$

$$n=0 \quad \pi_0(k) = \mathbb{1}(k)$$

$$n=1 \quad \pi_1(k) = \frac{k!}{1! (k-1)!} \cdot \mathbb{1}(k) = k \cdot \mathbb{1}(k)$$

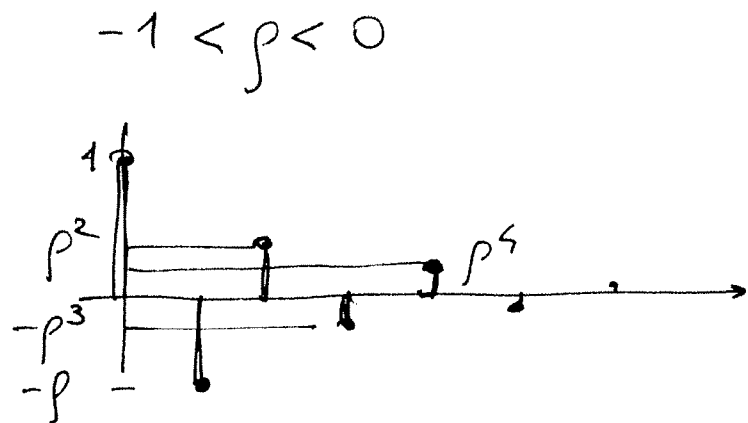
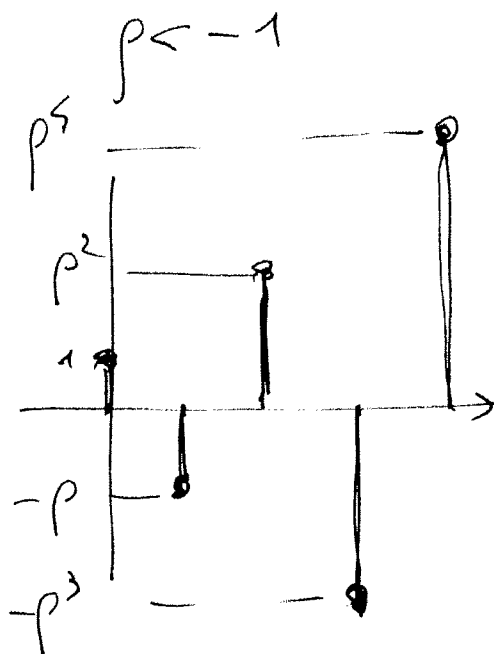
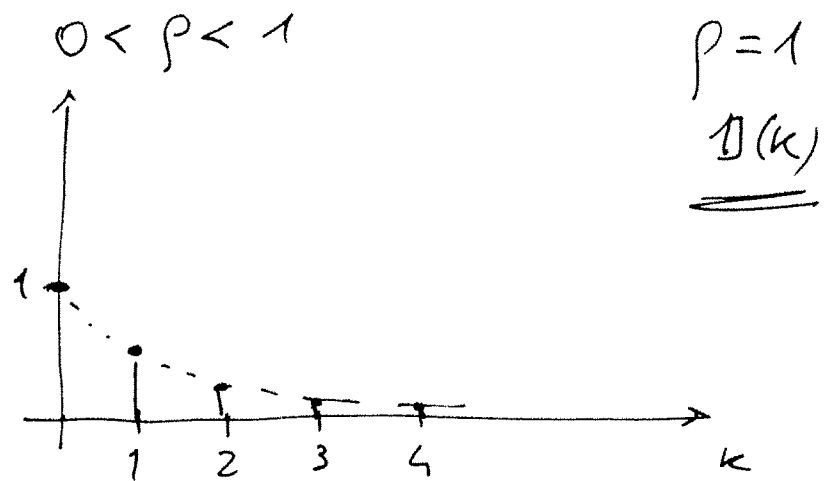
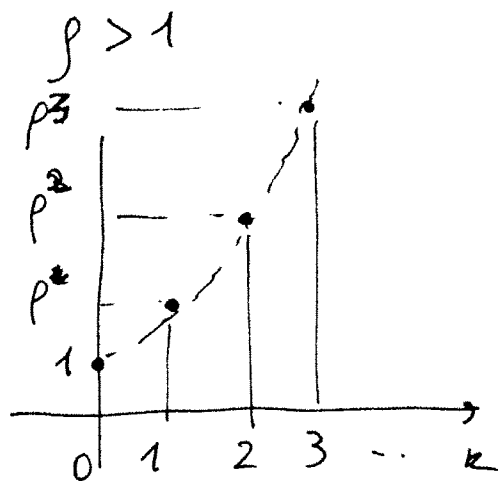


$$n=2 \quad \pi_2(k) = \frac{k!}{2! (k-2)!} \cdot \mathbb{1}(k) = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \mathbb{1}(k)$$

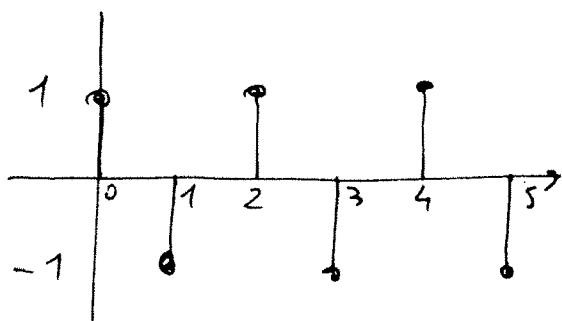


* segnali esponenziali:

$$f(k) = \rho^k \cdot \mathbb{1}(k)$$



$\rho = -1$



$\rho = 0$

$$f(k) = 0^k = \delta(k)$$

$|\rho| > 1 \rightarrow$ non divergenti

$|\rho| < 1 \rightarrow$ non convergenti

$|\rho| = 1 \rightarrow$ non limitati
non convergenti

* Segnali a rampa esponenziale

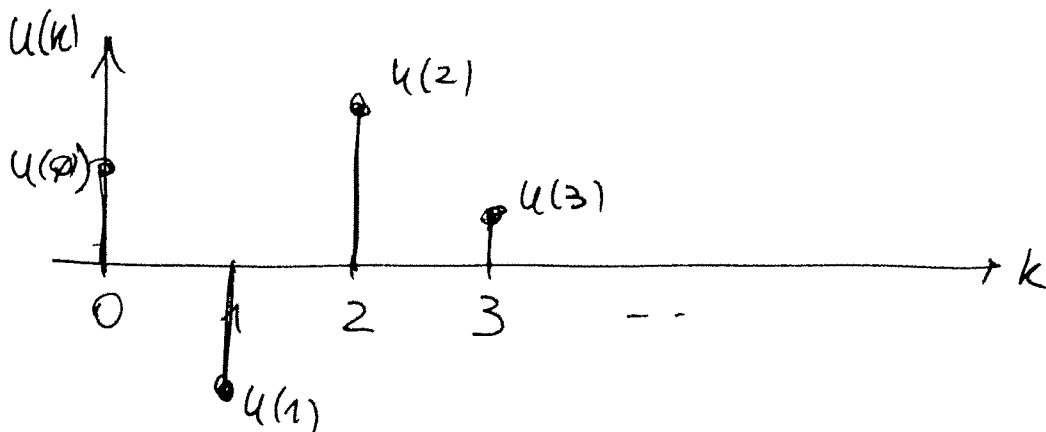
$$f(k) = \sum^n \binom{k}{n} \cdot \delta(k)$$

* Segnali sinusoidali:

$$\begin{aligned} f(k) = \cos(\omega \cdot k) &= \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (e^{j\omega})^k + \frac{1}{2} (e^{-j\omega})^k \end{aligned}$$

In generale, qualunque segnale $u(k)$, $k=0, \dots, +\infty$ può essere scritto come

$$\begin{aligned} u(k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} u(i) \cdot \delta(k-i) = \\ &= u(0) \cdot \delta(k) + u(1) \delta(k-1) + u(2) \cdot \delta(k-2) + \dots \end{aligned}$$



TRASFORMATA ZETA

Sia $f(k)$ un segnale a tempo discreto tale che $f(k)=0, \forall k < 0$, ed $\exists M > 0$ e $\rho_0 \in \mathbb{R}, \rho_0 > 0$ ed un istante $k_0 \in \mathbb{N}$ tali che

$$|f(k)| < M \rho_0^k \quad \forall k \geq k_0$$

Allora, si dice TRASFORMATA ZETA di $f(k)$ la funzione $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k} =$$

$$= f(0) \cdot 1 + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots$$

Risultato: la serie in $F(z)$ converge per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| > \rho_0$ (raggio di convergenza)

Esempi

1) Impulso $\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1 \cdot z^{-0} + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots = 1$$

2) Gradino $1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[1(k)] &= 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

Proprietà della trasformata Zeta

1) Linearità

$$f = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad \mathcal{Z}[f] = \alpha \cdot \mathcal{Z}[u_1] + \beta \mathcal{Z}[u_2]$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) Ritardo

$$g(k) = f(k - k_0) \cdot \mathbb{1}(k - k_0) \quad k_0 \geq 0, k_0 \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[g(k)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k - k_0) \cdot \mathbb{1}(k - k_0) z^{-k} \cdot z^{k_0} z^{-k_0} = \\ &= z^{-k_0} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{f(k - k_0)}_m z^{-(k - k_0)} \cdot \mathbb{1}(k - k_0) = \\ &= z^{-k_0} \sum_{m=-k_0}^{+\infty} f(m) z^{-m} \cdot \mathbb{1}(m) = \\ &= z^{-k_0} \sum_{m=0}^{+\infty} f(m) z^{-m} = z^{-k_0} F(z) \end{aligned}$$

3) Moltiplicazione per un esponenziale

$$g(k) = p^k \cdot f(k) \quad \mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[g(k)] &= \mathcal{Z}[p^k f(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k f(k) z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \left(\frac{z}{p}\right)^{-k} = F\left(\frac{z}{p}\right) \end{aligned}$$

Esempio: segnale esponenziale

$$u(k) = \rho^k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}[\rho^k \cdot 1(k)] = \frac{z}{z-1} \Big|_{z \leftarrow \frac{z}{\rho}} = \frac{z/\rho}{z/\rho - 1} = \frac{z}{z-\rho}$$

4) Moltiplicazione per k

$$g(k) = k \cdot f(k)$$

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z)$$

$$\mathcal{Z}[k \cdot f(k)] = -z \cdot \frac{dF(z)}{dz}$$

Esempio: segnali canonici

$$r_1(k) = k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z}[k \cdot 1(k)] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$r_2(k) = \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1(k) = \frac{1}{2} k^2 \cdot 1(k) - \frac{1}{2} k \cdot 1(k)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\underbrace{k^2 \cdot 1(k)}_{k \cdot r_1(k)}] &= -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = -z \cdot \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4} \\ &= -z \frac{z-1-2z}{(z-1)^3} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}[r_2(k)] &= \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{z(z+1) - z(z-1)}{(z-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{z^2} + z - \cancel{z^2} + z}{(z-1)^3} = \\
 &= \frac{z}{(z-1)^3}
 \end{aligned}$$

In generale

$$\mathcal{Z}[r_m(k)] = \mathcal{Z}\left[\binom{k}{m} \cdot 1(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

* Esempio: segnale sinusoidale:

$$u(k) = \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

$$U(z) = \mathcal{Z}[\cos(\omega k)] = \frac{1}{2} \mathcal{Z}[(e^{j\omega})^k] + \frac{1}{2} \mathcal{Z}[(e^{-j\omega})^k]$$

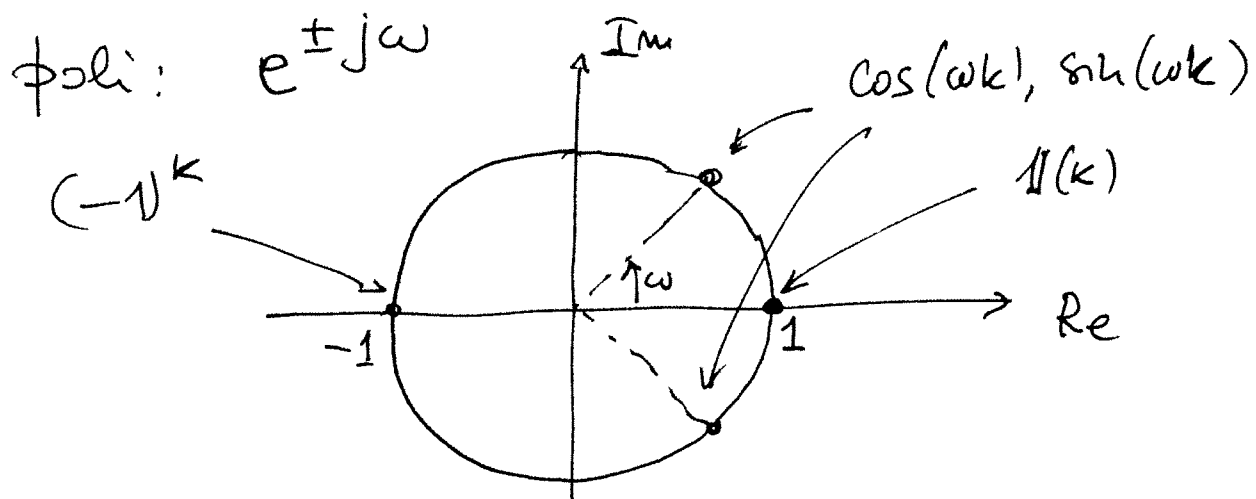
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z - e^{j\omega}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z - e^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{z(z - e^{-j\omega}) + z(z - e^{j\omega})}{2(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})} = \frac{z^2 - ze^{-j\omega} + z^2 - ze^{j\omega}}{2(z^2 - e^{j\omega}z - e^{-j\omega}z + 1)}$$

$$= \frac{2z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{2(z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1)} = \frac{z^2 - \cos \omega \cdot z}{z^2 - 2\cos \omega \cdot z + 1}$$

$$\mathcal{Z} [\cos(\omega k)] = \frac{z^2 - \cos \omega \cdot z}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$$

$$\mathcal{Z} [\sin(\omega k)] = \frac{z \cdot \sin \omega}{z^2 - 2 \cos \omega \cdot z + 1}$$



Casi particolari: $\omega = 0 \rightarrow 1(k)$

$$\omega = \pi \rightarrow \cos(\pi k) = (-1)^k$$

Esempio: rampa esponenziale

$$f(k) = \rho^k \binom{k}{n} \cdot 1(k)$$

$$n=1 \quad f(k) = \rho^k \cdot k \cdot 1(k)$$

$$\mathcal{Z} [k \cdot \rho^k \cdot 1(k)] = -z \cdot \frac{d}{dz} \frac{z}{z-\rho} = -z \frac{\cancel{z} - \rho - \cancel{z}}{(z-\rho)^2} =$$

$$\frac{z}{z-\rho} = \frac{\rho \cdot z}{(z-\rho)^2}$$

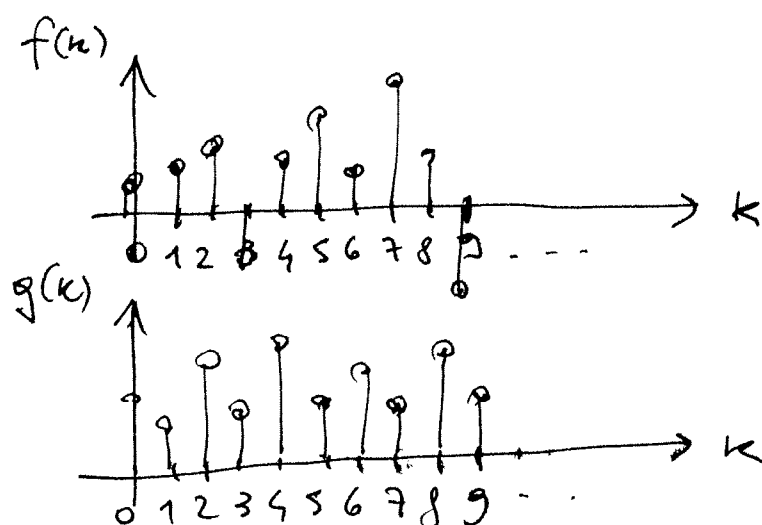
In generale: $\mathcal{Z} [\rho^k \binom{k}{n} \cdot 1(k)] = \frac{\rho^n z}{(z-\rho)^{n+1}}$

5) Prodotto di convoluzione

Si definisce prodotto di convoluzione dei segnali $f(k)$ e $g(k)$ come

$$p(k) = f(k) * g(k) = \sum_{h=0}^k f(h) g(k-h)$$

$$P(z) = \mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$$



$$\begin{aligned} p(0) &= f(0) g(0) \\ p(1) &= f(0) g(1) + f(1) g(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(3) &= f(0) \cdot g(3) + f(1) \cdot g(2) + \dots + f(3) \cdot g(0) \\ p(10) &= f(0) g(10) + \dots + f(10) g(0) \end{aligned}$$

6) Teorema del valore finale

Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k)$ esiste finito, allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z)$$

Il limite esiste finito se e solo se $F(z)$ ha tutti i poli a modulo minore di 1, tranne al più un polo semplice in $z=1$.

Calcolo delle risposte nel dominio trasformato (z)

Rapp. i/s/o

$$X(k+1) = A X(k) + B u(k)$$

noti $u(k)$, $x(0)$

$$y(k) = C X(k) + D u(k)$$

$$Z[X(k+1)] = \sum_{k=0}^{+\infty} X(k+1) z^{-k} = \sum_{h=1}^{+\infty} X(h) z^{-(h-1)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} X(h) z^{-h} \cdot z = z \cdot \sum_{h=1}^{+\infty} X(h) z^{-h} =$$

$$= z \left\{ \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} X(h) z^{-h}}_{\bar{X}(z)} - X(0) \cdot z^{-0} \right\} =$$

$$= z \cdot \bar{X}(z) - X(0) \cdot z$$

Trasformando le equazioni i/s/o si ha

$$\begin{cases} z \cdot \bar{X}(z) - X(0)z = A \cdot \bar{X}(z) + B U(z) \\ Y(z) = C \cdot \bar{X}(z) + D \cdot U(z) \end{cases}$$

$$z \cdot \bar{X}(z) - A \cdot \bar{X}(z) = z X(0) + B U(z)$$

$$(z I - A) \bar{X}(z) = z X(0) + B U(z)$$

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1} \cdot z \cdot x(0)}_{X_l(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} B \cdot U(z)}_{X_f(z)}$$

risposta libera risposta forzata
nello stato nello stato

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} z x(0) + C(zI - A)^{-1} B U(z) + D U(z)$$

$$= \underbrace{C(zI - A)^{-1} z x(0)}_{Y_l(z)} + \underbrace{\{C(zI - A)^{-1} B + D\} \cdot U(z)}_{Y_f(z)}$$

risposta libera risposta forzata
nell'uscita nell'uscita

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z)$$

dove $G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$ è la funzione di trasferimento del sistema

Supponiamo di avere un segnale $y(k)$, tale per cui in generale $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$ sono diversi da zero.

$$\mathcal{Z}[y(k-l)] = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k-l) z^{-k} =$$

$$l \in \mathbb{N}$$

$$= y(-l) + y(-l+1)z^{-1} + y(-l+2)z^{-2} + \dots + \underbrace{y(0)z^{-l} + y(1)z^{-l-1} + y(2)z^{-l-2} + \dots}$$

$$= y(-l) + y(-l+1)z^{-1} + \dots + y(-1)z^{-l+1} + z^{-l} \{ y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \dots \} =$$

$$= y(-l) + y(-l+1)z^{-1} + \dots + y(-1)z^{-l+1} + z^{-l} \cdot \bar{Y}(z)$$

Rapp. i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$\bar{Y}(z) + a_1 \{ \underline{y(-1)} + z^{-1} \bar{Y}(z) \} +$$

$$+ a_2 \{ \underline{y(-2)} + \underline{y(-1)}z^{-1} + z^{-2} \bar{Y}(z) \} + \dots +$$

$$+ a_m \{ \underline{y(-m)} + \underline{y(-m+1)}z^{-1} + \dots + \underline{y(-1)}z^{-m+1} + z^{-m} \bar{Y}(z) \} =$$

$$= b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \right\} Y(z) = \\
 & = - \left\{ a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 y(-1) z^{-1} + \dots + \right. \\
 & \quad \left. + a_n y(-n) + a_n y(-n+1) z^{-1} + \dots + a_n y(-1) z^{-n+1} \right\} + \\
 & \quad + \left\{ b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m} \right\} U(z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & \frac{- \left\{ \begin{array}{l} \text{termini che dipendono dalle} \\ \text{condizioni iniziali} \end{array} \right\}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} + \\
 & + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \cdot U(z)
 \end{aligned}$$

Ipotesi: $n \geq m$ (se $n < m$ moltiplicare per z^m)

$$\begin{aligned}
 Y(z) = & \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_1 z}{\underbrace{z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n}_{Y_d(z)}} + \\
 & + \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{\underbrace{z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}_{Y_d(z)}} \cdot U(z)
 \end{aligned}$$

Dove i coefficienti c_j , $j=1 \dots m$ dipendono dalle condizioni iniziali $y(-1) \dots y(-m)$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z)$$

dove $G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z^{m-m}}{z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m}$

Antitrasformata Z

197

Definizione:

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) \cdot z^{k-1} dz$$

dove Γ è un qualunque percorso chiuso nel piano complesso z che contiene i poli di $F(z)$:

Per le funzioni $F(z)$ razionali fratte, la procedura è la stessa adottata per l'antitrasformata di Laplace:

- 1) calcolo dei poli
- 2) scomposizione in fratti semplici
- 3) antitrasformata dei fratti semplici (tabelle)

Problema: le trasformate Z elementari sono proprie (non strettamente)

$$p^k \rightarrow \frac{z}{z-p} \quad \delta(k) \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

La scomposizione in fratti semplici fornisce elementi strettamente propri, del tipo

$$\frac{R_i}{z - p_i} \quad p_i: \text{polo}$$

$$z^{-1} \left[\frac{1}{z-p} \right] = ?$$

Due modi:

$$\Rightarrow) \frac{1}{z-p} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\substack{\text{risolto} \\ \text{di} \\ \text{1 ordine}}} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-p}}_{\substack{\downarrow z^{-1} \\ p^k}}$$

$$z^{-1} \left[\frac{1}{z-p} \right] = p^{k-1} \cdot \mathbb{1}(k-1)$$

$$b) \quad \overline{F}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{z-p} \qquad F(z) = \frac{1}{z-p} = z \cdot \overline{F}(z)$$

Scomponiamo il tratto semplice di $\overline{F}(z)$,

$$\overline{F}(z) = \frac{R_1}{z} + \frac{R_2}{z-p} = \frac{-1/p}{z} + \frac{1/p}{z-p}$$

$$F(z) = z \cdot \overline{F}(z) = -\frac{1}{p} \cdot \underbrace{\frac{z}{z}} + \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-p}}$$

$$f(k) = z^{-1} \left[\frac{1}{z-p} \right] = -\frac{1}{p} \delta(k) + \frac{1}{p} p^k \cdot \mathbb{1}(k)$$

In generale, il metodo b) consiste nello scomporre in fattori semplici $\frac{F(z)}{z}$:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{z-p_i} \quad (\text{poli semplici})$$

da cui

$$F(z) = \sum_{i=1}^n R_i \left(\frac{z}{z-p_i} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{funzioni che} \\ \text{si trovano} \\ \text{nella tabella} \\ \text{(trasformate} \\ \text{elementari)} \end{array}$$

Esempio

$$F(z) = \frac{2z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

poli: $z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \quad p_{1,2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{4}{6}}}{2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2z - \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} = \frac{R_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{R_2}{z - \frac{1}{3}}$$

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{F(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = 3$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \left(z - \frac{1}{3} \right) \frac{F(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = -1$$

$$F(z) = 3 \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$f(k) = \left\{ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\} \cdot \mathbb{1}(k)$$

Il caso di poli multipli si tratta in modo analogo.

$$F(z) = \frac{\dots}{(z-p_1)^{\mu_1} \dots (z-p_n)^{\mu_n}}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{R_{1,1}}{z-p_1} + \frac{R_{1,2}}{(z-p_1)^2} + \dots + \frac{R_{1,\mu_1}}{(z-p_1)^{\mu_1}} + \dots$$

$$F(z) = R_{1,1} \frac{z}{z-p_1} + R_{1,2} \frac{z}{(z-p_1)^2} + \dots +$$

$\downarrow$
 $p_1^k \cdot \mathbb{1}(k)$

$\downarrow$
 $k \cdot p_1^{k-1} \cdot \mathbb{1}(k)$

$$+ R_{1,\mu_1} \frac{z}{(z-p_1)^{\mu_1}}$$

$$\downarrow$$

$$\binom{k}{\mu_1-1} \cdot p_1^{k-\mu_1+1} \cdot \mathbb{1}(k)$$

Modi nei sistemi LTI a tempo discreto

poli	modi
$p \in \mathbb{R}$ semplice	$p^k \cdot \delta(k)$
$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi} \in \mathbb{C}$ semplici	$\rho^k \cos(\phi k), \rho^k \sin(\phi k)$
$p \in \mathbb{R}$ molteplicità μ	$p^k \cdot \delta(k), k \cdot p^k \cdot \delta(k), \dots$ $\dots, k^{\mu-1} \cdot p^k \cdot \delta(k)$
$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi} \in \mathbb{C}$ molteplicità μ	$\rho^k \cos(\phi k), \rho^k \sin(\phi k),$ $k \rho^k \cos(\phi k), k \rho^k \sin(\phi k), \dots$ $\dots$ $k^{\mu-1} \rho^k \cos(\phi k), k^{\mu-1} \rho^k \sin(\phi k)$
$p = 0$	$\delta(k)$

Carattere di convergenza dei modi

- 1) I modi sono convergenti se e solo se $|p_i| < 1$ [indipendentemente dalla molteplicità del polo p_i]
- 2) I modi sono limitati, non convergenti, se e solo se $|p_i| = 1$ e p_i è un polo semplice (mult. algebrica = 1)
- 3) In tutti gli altri casi si hanno modi divergenti

Analogie con i sistemi a tempo-continuo

- 1) ~~sistemi~~ Risposte impulsive e funzione di trasferimento

$$u(k) = \delta(k) \longrightarrow U(z) = 1$$

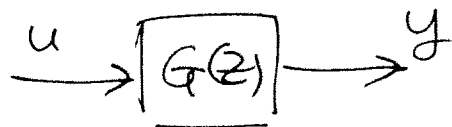
$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z)$$

$$y_f(k) = \underbrace{z^{-1}[G(z)]}_{g(k)} \quad \text{La risposta impulsiva è l'antitrasformata } z \text{ della funzione di trasferimento } G(z)$$

Per un generico ingresso $u(k)$, la risposta forata $y_f(k)$ è il prodotto di convoluzione tra $u(k)$ e la risposta impulsiva $g(k)$

$$y_f(k) = \sum_{i=0}^k g(i) u(k-i)$$

- 2) Interconnessione di sistemi LTI



Esattamente come nel caso tempo-continuo!

3) Teorema della risposta in frequenza

Si consideri un sistema la cui funzione di trasferimento $G(z)$ ha tutti i poli a modulo minore di 1.

Si ha $u(k) = M \cdot \cos(\omega k + \varphi)$. Allora

$$y_f(k) = y_T(k) + y_{perm}(k)$$

dove $\lim_{k \rightarrow \infty} y_T(k) = 0$ (risposta di regime transitorio)

e

$$y_{perm}(k) = M \cdot |G(e^{j\omega})| \cdot \cos(\omega k + \varphi + \angle G(e^{j\omega}))$$

si chiama risposta di regime permanente.

$$G(e^{j\omega}) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$x_1(k)$: giocatori che al turno k arrivano avendo fatto un movimento

$x_2(k)$: giocatori che al turno k non hanno fatto un movimento

$$\begin{aligned} 1) \quad x_1(k+1) &= \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{3} u(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{2}{3} x_1(k) + \frac{2}{3} u(k) \\ y(k) &= \frac{1}{3} x_1(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad G(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z \end{bmatrix}}{z^2 - \frac{2}{9}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}z + \frac{2}{9} \\ * \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 - \frac{2}{9}} = \frac{\frac{1}{9}z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}} \end{aligned}$$

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{9}z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}} \cdot U(z)$$

$$\left(z^2 - \frac{2}{9}\right) Y_f(z) = \left(\frac{1}{9}z + \frac{2}{27}\right) U(z)$$

$$z^{-1} \left(z Y(z) \right) = y(k+1)$$

$$\boxed{y(k+2) - \frac{2}{9}y(k) = \frac{1}{9}u(k+1) + \frac{2}{27}u(k)} \quad | / 0$$

$$y(k) - \frac{2}{9}y(k-2) = \frac{1}{9}u(k-1) + \frac{2}{27}u(k-2)$$

$$3) \quad u(k) = N \cdot \mathbb{1}(k)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = ?$$

Perché $G(z)$ ha tutti i poli a modulo < 1 ,
il limite esiste finito $\rightarrow$ applico il
teorema del valore finale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y_f(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G(z) \cdot U(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \frac{\frac{1}{9}z + \frac{2}{27}}{z^2 - \frac{2}{9}} N \cdot \frac{z}{\cancel{z-1}} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{27}}{1 - \frac{2}{9}} N$$

$$= \frac{5}{27} \cdot \frac{9}{7} \cdot N = \frac{5}{21} \cdot N$$

α : quota d'ingresso

A regime, a ogni turno incasso $N\alpha$ e quindi devo ripartire $\frac{N\alpha}{2}$ tra i $\frac{5}{21}N$ vincitori

$$\text{vincita} = \frac{\frac{N\alpha}{2}}{\frac{5}{21}N} = \frac{21}{10}\alpha$$

In generale, se i poli di $G(z)$ hanno tutti modulo minore di 1, il limite per $k \rightarrow +\infty$ della risposta al gradino è dato da

$$\lim_{k \rightarrow 1} (z-1) \cdot G(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \underline{\underline{G(1)}}$$

↑
questo significa
o questo il valore

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$$y(k) + \underbrace{q_1}_{n=2}y(k-1) + q_2y(k-2) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(k+2) - \frac{1}{4}y(k+1) = u(k+1) - u(k)}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \quad (?)$$

$$x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) = \frac{1}{4}y(k) + u(k+1) - \underbrace{u(k)}_{ok}$$

$\underbrace{\frac{1}{4}y(k)}_{x_1(k)} \quad \uparrow ?$

second tentativ

$$x(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) - u(k) \end{bmatrix} \leftarrow x_2(k)$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = y(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = y(k+2) - u(k+1) = \frac{1}{4}y(k) - u(k) = \frac{1}{4}x_1(k) - u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = [0]$$

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$$y(k) \text{ relative a } y(-1) = 1 \quad y(-2) = 0$$

$$y(k) - \frac{1}{4} y(k-2) = 0$$

$$y(k) = \frac{1}{4} y(k-2)$$

$$y(0) = \frac{1}{4} y(-2) = 0$$

$$y(1) = \frac{1}{4} y(-1) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$y(2) = \frac{1}{4} y(0) = 0$$

$$y(3) = \frac{1}{4} y(1) = \frac{1}{16} \quad \dots$$

usiamo la parametr. i/s/o.

$$Y_L(z) = C(zI - A)^{-1} \cdot z \cdot X(0)$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) - u(k) \end{bmatrix} \rightarrow X(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) - u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Y_L(z) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z & -1 \\ -\frac{1}{4} & z \end{bmatrix}^{-1} z \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{4} z}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{Y_L(z)}{z} = \frac{R_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{R_2}{z + \frac{1}{2}} = \frac{R_1(z + \frac{1}{2}) + R_2(z - \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}$$

$$R_1 z + \frac{1}{2} R_1 + R_2 z - \frac{1}{2} R_2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ \frac{1}{2}R_1 - \frac{1}{2}R_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$R_1 = -R_2$$

$$-R_2 = \frac{1}{4}$$

$$R_1 = \frac{1}{4}$$

$$R_2 = -\frac{1}{4}$$

$$Y_L(z) = \frac{1}{4} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$y_L(k) = \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^k - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right\} \cdot \uparrow(k)$$

3) $\exists U(z)$ tale che

$$G(z) \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

?

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - u(k-2)$$

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = z^{-1}U(z) - z^{-2}U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{z^2 - 1}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 - \frac{1}{4}} \cdot U(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z^2 - \frac{1}{4}}$$

$$U(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4}z}{z - 1}$$

$$u(k) = \frac{1}{4} \cdot \uparrow(k)$$

Analisi dei sistemi LTI a tempo discreto, nel dominio del tempo

16

Nel dominio della trasformata z

$$X(z) = \underbrace{(zI - A)^{-1} z x(0)}_{X_e(z)} + \underbrace{(zI - A)^{-1} B \cdot U(z)}_{X_f(z)}$$

$$k=0 : \quad x(1) = \underbrace{Ax(0) + Bu(0)}$$

$$k=1 : \quad x(2) = A \cdot \underline{x(1)} + Bu(1) = \\ = \underbrace{A^2 x(0) + ABu(0) + Bu(1)}$$

$$k=2 : \quad x(3) = A \cdot \underline{\underline{x(2)}} + Bu(2) = \\ = A^3 x(0) + A^2 Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

$\vdots$

$$k \text{ generico:} \quad x(k) = A^k x(0) + A^{k-1} Bu(0) + A^{k-2} Bu(1) + \dots \\ \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1)$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{X_e(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)}_{X_f(k)}$$

$$A^k = z^{-1} [(zI - A)^{-1} z]$$

$$\left[\text{analogia col caso scalare, se } A \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \right] \\ z[A^k] = \frac{z}{z - A}$$

Esempio

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2} x_2(k)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow x_\ell(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_\ell(z) &= (zI - A)^{-1} z x(0) = \begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{\begin{pmatrix} z \\ z(z-1) \end{pmatrix}}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} \\ \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-\frac{1}{2}} = 2 \quad R_2 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{z-1} = -2$$

$$X_1(z) = 2 \frac{z}{z-1} - 2 \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$x_\ell(k) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1(k) - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k 1(k) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k 1(k) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{colonne d.} \\ \text{des} \\ \text{di } A^k \end{array}$$

Analisi modale nello spazio degli stati

162

$$x_l(k) = A^k x(0)$$

Proprietà di A^k :

1) se $Av = \lambda v$, $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

allora $A^k v = \lambda^k \cdot v$

2) se $\exists T$, $\det T \neq 0$ tale che $\bar{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$

allora $A^k = T \cdot \bar{A}^k \cdot T^{-1}$

Caso 1: A diagonalizzabile

$\exists T: A = T \cdot \Delta \cdot T^{-1}$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$T = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$

$$\Rightarrow A^k = T \cdot \Delta^k \cdot T^{-1} = T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} T^{-1}$$

$$x_l(k) = A^k x(0) = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} T^{-1} x(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i \cdot \alpha_i$$

dove $\alpha = T^{-1} x(0)$

Caso particolare: $x(0) = v_i \Rightarrow x_l(k) = \lambda_i^k \cdot v_i$

Case 2: A non diagonalizable

$$\exists T : \det T \neq 0 \text{ e } A = T \cdot J \cdot T^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$A^k = T \cdot J^k \cdot T^{-1} = T \begin{bmatrix} \boxed{J_1^k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_2^k} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_m^k} \end{bmatrix} T^{-1}$$

done

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2} \lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{i-1} \lambda_i^{k-i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Autovettore λ : $\text{mult. alg.}(\lambda) = \text{mult. geo.}(\lambda)$
 $\rightarrow$ modo λ^k

$\text{mult. alg.}(\lambda) > \text{mult. geo.}(\lambda) \rightarrow$

$\rightarrow$ modi : $\lambda^k, \underline{k \cdot \lambda^k}, k^2 \lambda^k, \dots$

$\uparrow$
di sicuro almeno uno

modi convergenti $\rightarrow |\lambda| < 1$

modi limitati non
convergenti $\rightarrow |\lambda| = 1$ $\text{mult. alg.}(\lambda) = \text{mult. geo.}(\lambda)$

modi divergenti $\rightarrow$ negli altri casi

Esempio: corso di laurea (2 anni)

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} X(k)$$

$$X_0(k) = A^k X(0)$$

Autovaleur: $\lambda = \beta$ mult. algebrica = 2

$$\text{Ker}(\lambda I - A) = \text{Ker}(\beta I - A) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0$, $\text{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mult. geom. = 1
non diagonalizzabile

Se $\alpha = 0$ $\text{Ker } 0 = \mathbb{R}^2$ diagonalizzabile!

$\exists T$: ~~$A = T \cdot \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} T^{-1}$~~

$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ (verificare!)

$$\begin{aligned} A^k &= T \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^k T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^k & \binom{k}{1} \beta^k \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^k & \frac{1}{\alpha} \beta^k \\ \beta^k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^k & 0 \\ \alpha \cdot k \beta^k & \beta^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_2(k) = A^k x(0) = \begin{bmatrix} \beta^k x_1(0) \\ \alpha \cdot k \cdot \beta^k \cdot x_1(0) + \beta^k \cdot x_2(0) \end{bmatrix}$$

Per le risposte libere e forzate nell'uscita valgono considerazioni analoghe.

In z :

$$\underline{Y}(z) = \underbrace{C(zI-A)^{-1}z x(\emptyset)}_{\underline{Y}_l(z)} + \underbrace{\left\{ C(zI-A)^{-1}B + D \right\} U(z)}_{\underline{Y}_f(z)}$$

$$\begin{aligned} y(k) &= C \underline{x(k)} + Du(k) = \\ &= \underbrace{CA^k x(\emptyset)}_{y_l(k)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i} Bu(i)}_{y_f(k)} + Du(k) \end{aligned}$$

Risposta impulsiva: $u(k) = \delta(k)$

$$y_f(\emptyset) = \cancel{\sum_{i=0}^{-1}} + D\delta(\emptyset) = D$$

$$y_f(1) = \sum_{i=0}^{\emptyset} CA^{-i} B \delta(i) + D\delta(1) = CB\delta(\emptyset) + D\delta(1) = CB$$

!

$$y_f(2) = CAB$$

$$y_f(3) = CA^2B$$

$$\rightarrow \text{risposta impulsiva} = \begin{cases} D & k=0 \\ CA^{k-1}B & k \geq 1 \end{cases}$$

I modi della risposta libera sono gli stessi della risposta impulsiva