ANALISI MODALE DEI SISTEMI LTI (TEMPO-CONTINUO)

"Modi": funzioni del tempo che compongono la risposta libera dei sistemi LTI ~~alla~~

poli di $Y_\ell(s)$	modi
$p \in \mathbb{R}$, $\mu = 1$ polo reale semplice	e^{pt} modo esponenziale
$p = \sigma \pm j\omega$ $\mu = 1$ coppia di poli complessi coniugati semplice	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ modi pseudoperiodici
$p \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$ polo reale multiplo	$e^{pt}, te^{pt}, t^2e^{pt}, \dots, t^{\mu-1}e^{pt}$
$p = \sigma \pm j\omega$ $\mu > 1$ coppia di poli complessi coniugati multipla	$e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ $te^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $te^{\sigma t}\sin(\omega t)$ $\vdots$ $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^{\mu-1}e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

Carattere di convergenza dei modi

Definizione:

Un modo $m(t)$ si dice:

* <u>Convergente</u> se $\lim_{t \to +\infty} m(t) = 0$
* <u>limitato non convergente</u> se non è convergetnte, ma $\exists\, M>0$ tale che $|m(t)| < M \quad \forall t \geq 0$
* <u>divergente</u> se $\forall M>0,\ \exists\, \bar{t}>0$ tale che $|m(\bar{t})| > M$

Risultati

1) Il modo relativo al polo p_i è convergente se e solo se $Re[p_i]<0$.
2) Il modo relativo al polo p_i è limitato non convergente se e solo se $Re[p_i]=0$ e il polo è semplice $[\mu=1]$.
3) In tutti gli altri casi il modo è divergente
4) $\lim_{t \to +\infty} m(t)$ esiste finito se $M(s)=\mathcal{L}[m(t)]$ ha tutti i poli a parte reale negativa, tranne al più un polo semplice in zero.
[In tal caso posso applicare il teorema del valore finale]

Risposta forzata a ingressi speciali

1 Risposta impulsiva

$$u \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y$$

La risposta impulsiva del sistema è la risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso $u(t) = \delta(t)$.

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(s) = 1$$

$$Y_f(s) = G(s)$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right] = g(t)$$

La risposta impulsiva è l'antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento.

Per un generico segnale di ingresso $u(t)$,

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s) \cdot U(s)\right] =$$

$$= \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

La risposta forzata ad un generico ingresso $u(t)$ è la convoluzione di $u(t)$ con la risposta impulsiva del sistema

Sia $\hat{y}(t)$ la risposta forzata al segnale di ingresso $\hat{u}(t)$.
Come faccio a calcolare la risposta forzata ad un qualunque altro ingresso $\bar{u}(t)$?

$$\hat{Y}(s) = G(s)\,\hat{U}(s) \rightarrow G(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)}$$

$$\bar{Y}(s) = G(s) \cdot \bar{U}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{Y}(s)] = \bar{y}(t)$$

(2) Risposta al gradino unitario

$$u(t) = \mathbb{1}(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s)\,U(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$\exists$ finito $\lim_{t\to+\infty} y_f(t)$? (risposta al gradino)

Il limite della risposta al gradino $\exists$ finito se e solo se $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.
In tal caso

$$\lim_{t\to+\infty} y_f(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y_f(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot G(s)\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = G(0)$$

prende il nome di GUADAGNO IN CONTINUA o GUADAGNO STAZIONARIO del sistema.

Nel tempo si ha

$$y_f(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t g(\sigma)\,d\sigma$$

La risposta al gradino è l'integrale della risposta impulsiva.
Perché? Il gradino è l'integrale dell'impulso!

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{Agg}[(sI-A)]^T}{\det(sI-A)}$$

← matrice $n \times n$ di polinomi di grado $\leq n-1$

↖ polinomio di grado n in s

$$Y_\ell(s) = \frac{C \cdot \mathrm{Agg}[(sI-A)]^T}{\det(sI-A)}$$

← i poli di $Y_\ell(s)$ sono gli autovalori di A

$$Y_{\text{impulsiva}}(s) = G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$= \frac{C \cdot \mathrm{Agg}[(sI-A)]^T B}{\det(sI-A)} + D =$$

$$= \frac{C \cdot \mathrm{Agg}[(sI-A)]^T B + D \cdot \det(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

← i poli di $G(s)$ sono gli stessi di $Y_\ell(s)$

$\Rightarrow$ I modi della risposta impulsiva sono gli stessi della risposta libera

Risposta al gradino nei sistemi del primo ordine

$$\dot{x}(t) = \overbrace{(-a)}^{A} \cdot x(t) + \overbrace{a}^{B} \cdot u(t)$$

$$y(t) = x(t) \qquad \leftarrow C=1 \quad D=0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = 1 \cdot (s-(-a))^{-1} a + \emptyset =$$

$$= (s+a)^{-1} \cdot a = \frac{a}{s+a}$$

ordine del sistema $= \begin{cases} \text{\# di stati} & i/s/o \\ \text{grado del denominatore di } G(s) & i/o \end{cases}$

$$u(t) = 1\!\!1(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{a}{s+a} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right]$$

$$\frac{a}{s(s+a)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+a} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

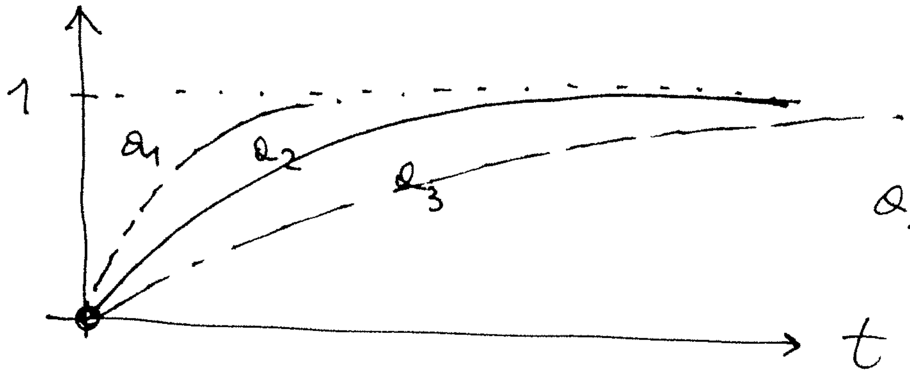
$p_1 = 0$ $\quad$ $p_2 = -a$ $\quad$ se $a \neq 0$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} s \cdot Y_f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

$$R_2 = \lim_{s \to -a} (s+a) Y_f(s) = \lim_{s \to -a} \frac{a}{s} = -1$$

$$y_f(t) = 1(t) - e^{-at} \cdot 1(t) = \left(1 - e^{-at}\right) \cdot 1(t)$$

<u>$a > 0$</u>



$a_1 > a_2 > a_3$

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad \text{polo} = -a < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y_f(t) = G(0) = \left.\frac{a}{s+a}\right|_{s=0} = 1$$

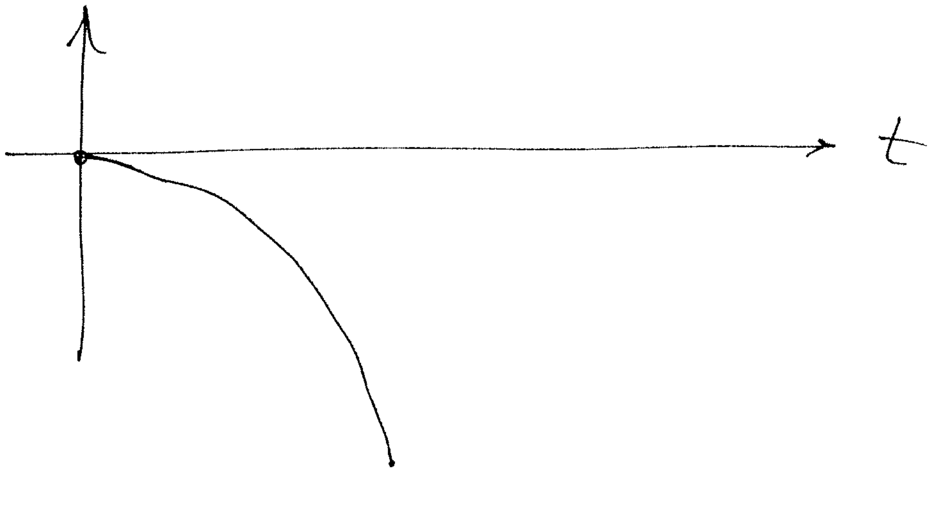
$$G(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\tau} \cdot s} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

τ: costante di tempo del sistema

$$y_f(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot 1(t)$$

Quando $t \simeq 5\tau$, si può considerare che $y_f(t) \simeq 1$ (con un errore $\leq 1\%$)

<u>$a < 0$</u>



$a = 0$?

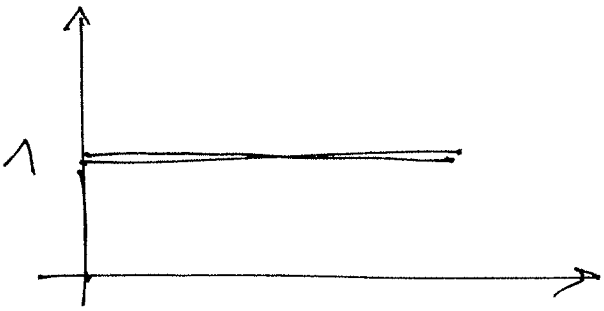
$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + b\,u(t)$$
$$y(t) = x(t)$$

$$G(s) = \frac{b}{s+a} = \Big|_{a=0} \frac{b}{s}$$

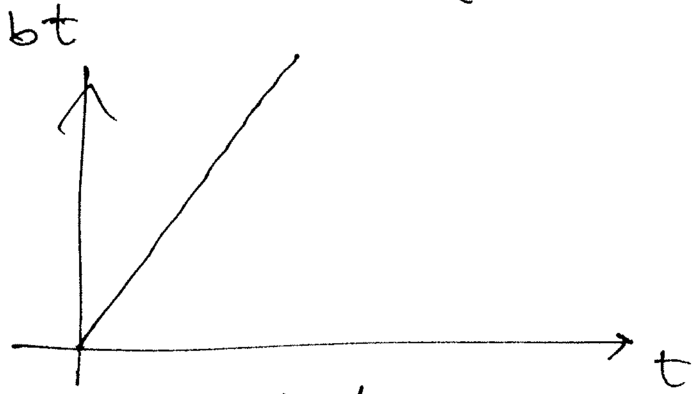
$u(t) = 1(t) \qquad U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_f(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{b}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{b}{s^2}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2}\right] = b\cdot t\cdot 1(t)$$ ← modo nuovo! (risonanza)



$u(t) = 1(t)$



$y_f(t)$

Azione integrale: $G(s) = \frac{1}{s}$ "integratore"

Risposta al gradino nei sistemi del secondo ordine.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_n^2 x_1(t) - 2\zeta\omega_n x_2(t) + \omega_n^2 u(t)$$

$$\omega_n > 0$$

$$y(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega_n^2 & s+2\zeta\omega_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Calcolo dei poli:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} =$$

$$= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

se $|\zeta| \geq 1$ ho due radici reali
($\rightarrow$ comportamento "del primo ordine"

Caso $|\zeta| < 1$ $\rightarrow$ $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$\rightarrow$ modi: $e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$

$e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$

ω_n: pulsazione naturale ζ: smorzamento

$0 < \zeta < 1$ $\rightarrow$ modi convergenti

$-1 < \zeta < 0$ $\rightarrow$ modi divergenti

$\zeta = 0$ $\rightarrow$ $\cos(\omega_n t)$, $\sin(\omega_n t)$ modi limitati

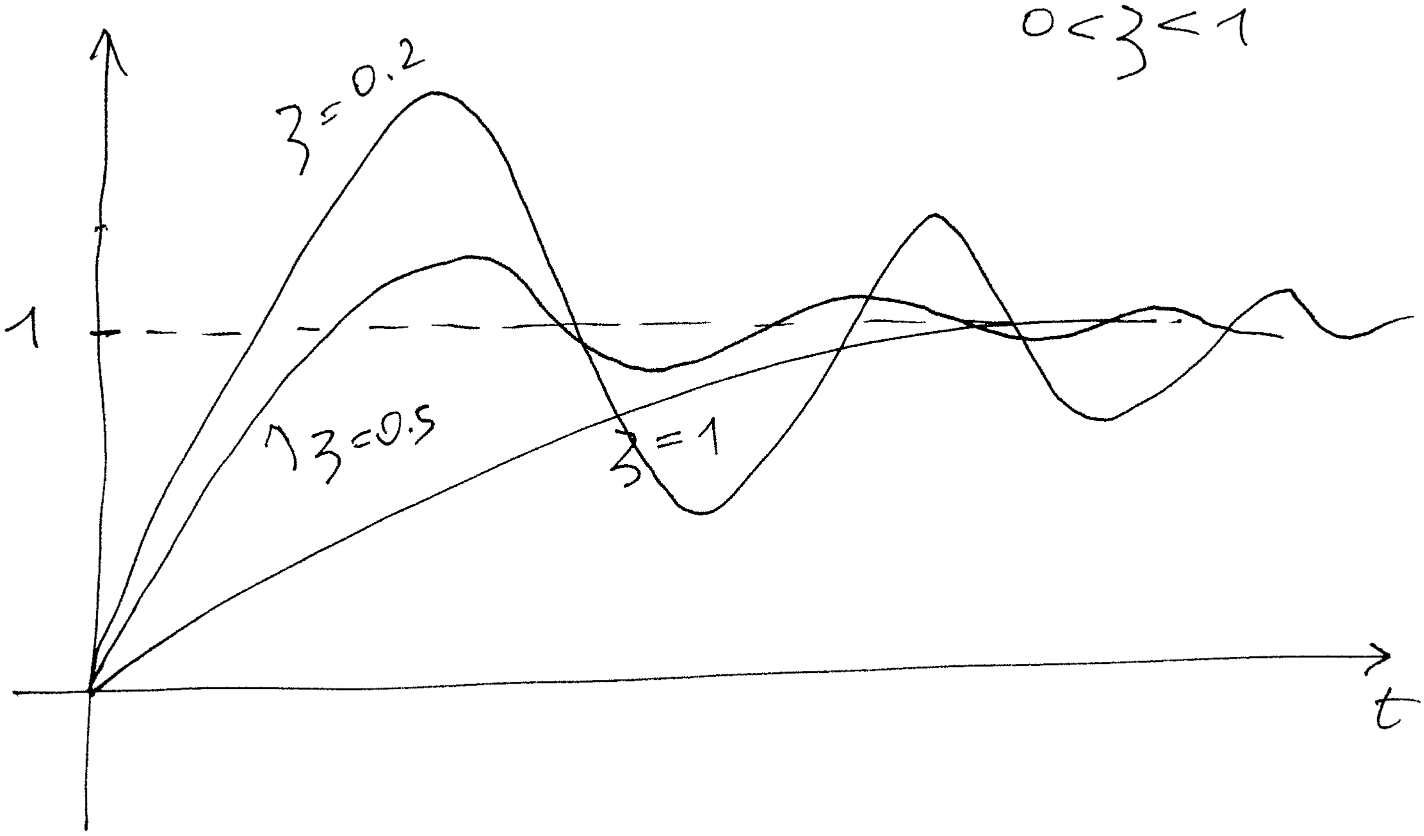
$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right]$$

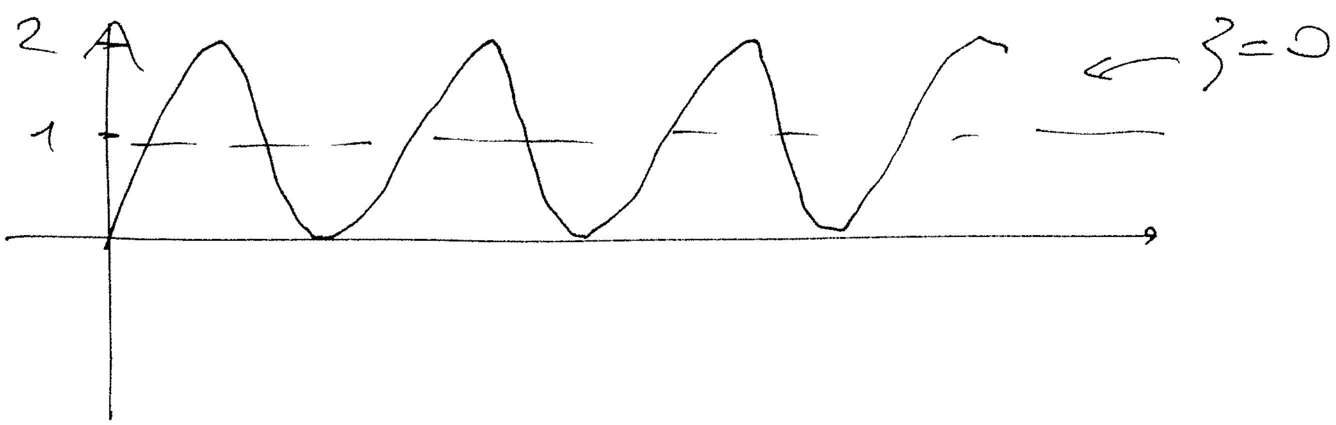
$$Y_f(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}\left(1 + \frac{s}{2\zeta\omega_n}\right)}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

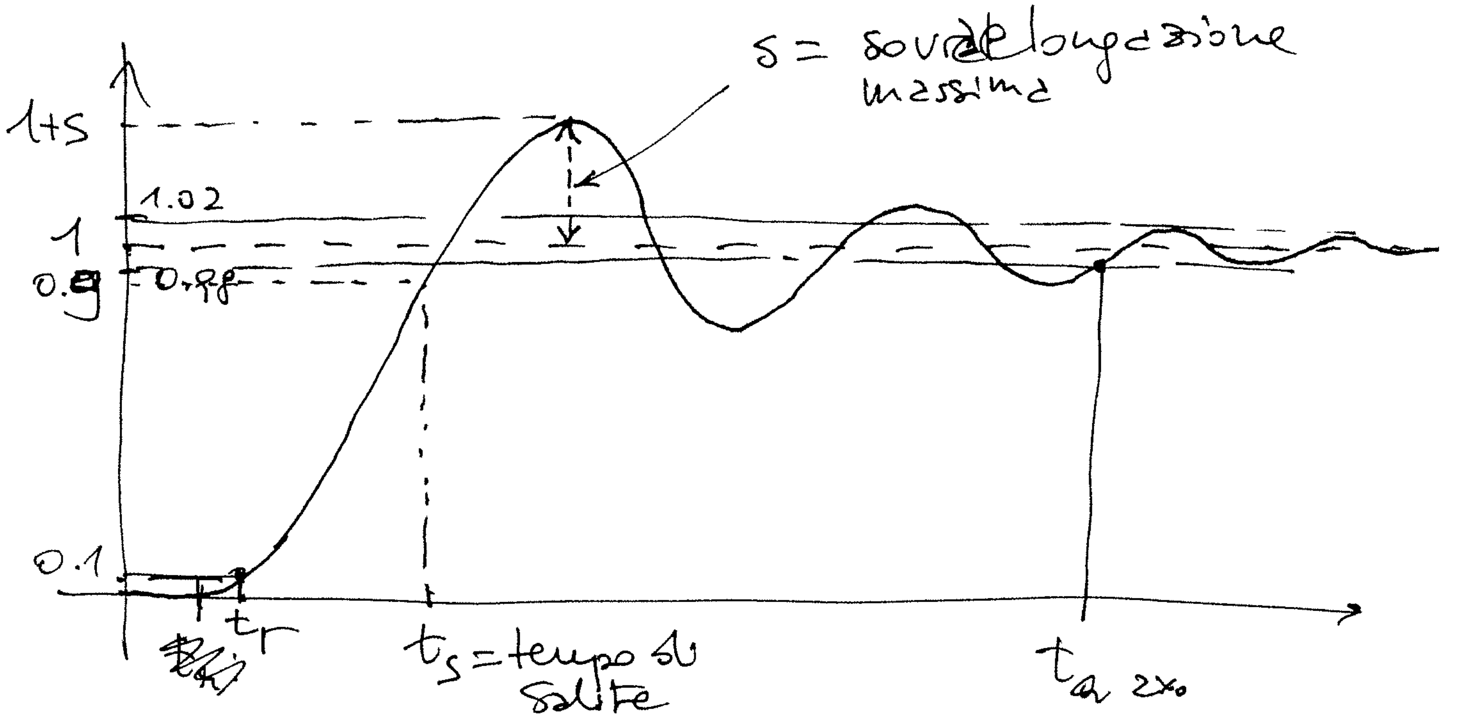
$$y_f(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$0 < \zeta < 1$





Parametri caratteristici dei sistemi del secondo ordine

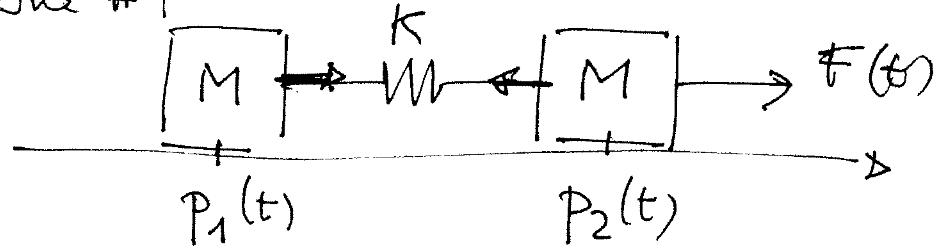


t_r: tempo di ritardo

$t_{a\,2\%}$ = tempo di assestamento al 2%

Esercitazione #1

Es. 1



$M=1$
$K=2$

$$M\,\ddot{p}_1(t) = K\left(p_2(t)-p_1(t)\right)$$

$$M\,\ddot{p}_2(t) = F(t) - K\left(p_2(t)-p_1(t)\right)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ \dot{p}_1(t) \\ p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = F(t) \qquad y(t) = p_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2\left(x_3(t)-x_1(t)\right)$$
$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = u(t) - 2\left(x_3(t)-x_1(t)\right)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s & -2 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -2 & 0 & 2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\det(sI - A) = s \cdot \det \begin{pmatrix} s & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2 & s \end{pmatrix} - (-1)\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 2 & s \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot s\,(s^2+2) + 2 \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}$$

$$= s^2(s^2+2) + 2\,(s^2+2) - 2 \cdot 2 =$$

$$= s^2(s^2+2) + 2\,(s^2+2-2) =$$

$$= s^2(s^2+2) + 2s^2 = s^2(s^2+4)$$

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\mathrm{Agg} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 2 & s & -2 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -2 & 0 & 2 & s \end{bmatrix} \right)^{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2(s^2+4)}$$

$$= \frac{\mathrm{Agg}(4,1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{(-1)^{4+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{pmatrix}}{s^2(s^2+4)} =$$

$$= \frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{2}{s^4 + 4s^2}$$

$$y_f(t) = \left\{ \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin(2t) \right\} \cdot 1(t)$$

$$Y_f(s) = \underset{\underset{\frac{2}{s^2(s^2+4)}}{\parallel}}{G(s)} \cdot U(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{-t}\right] = \frac{1}{(s+1)^{k+1}}$$

$$u(t) = \underbrace{\gamma_0 e^{-t}} + \underbrace{\gamma_1 t e^{-t}} + \gamma_2 \frac{t^2}{2!} e^{-t} + \dots$$

$$U(s) = \gamma_0 \cdot \frac{1}{s+1} + \gamma_1 \frac{1}{(s+1)^2} + \gamma_2 \frac{1}{(s+1)^3} + \dots$$

Solo γ_0: $\quad Y_f(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \cdot \gamma_0 \cdot \frac{1}{s+1}$

γ_0, γ_1

$$Y_f(s) = \frac{2}{s^2(s^2+4)} \left\{ \gamma_0 \frac{1}{s+1} + \gamma_1 \frac{1}{(s+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{2}{s^2(s^2+4)} \cdot \frac{\gamma_0(s+1) + \gamma_1}{(s+1)^2} \underset{\substack{\gamma_0 = 1 \\ \gamma_1 = -1}}{=} \frac{2}{s(s^2+4)(s+1)^2}$$

$$u(t) = \{ e^{-t} - t e^{-t} \} \cdot 1(t)$$

$$\frac{Y_f(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{2}{s^4+4s^2}$$

$$(s^4+4s^2)Y_f(s) = 2 \cdot U(s)$$

$$\frac{d^4}{dt^4} y(t) + 4\frac{d^2}{dt^2} y(t) = 2u(t) \qquad i/o$$

poli: $p_1 = 0$ $p_2 = 0$ $p_3 = +j2$ $p_4 = -j2$

modi: $1(t)$, $t \cdot 1(t)$, $\cos(2t)$, $\sin(2t)$

ap. lim., ap. div., pseudop. lim., pseudop. lim.

Risposta impulsiva

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right]$$

$$\frac{2}{s^2(s^2+4)} = \frac{\gamma_1}{s} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \frac{\gamma_3 s}{s^2+4} + \frac{\gamma_4 2}{s^2+4}$$

$$2 = \gamma_1 s(s^2+4) + \gamma_2(s^2+4) + \gamma_3 s \cdot s^2 + \gamma_4 2 \cdot s^2$$

$$2 = \underline{\gamma_1 s^3} + 4\gamma_1 s + \underline{\underline{\gamma_2 s^2}} + 4\gamma_2 + \underline{\gamma_3 s^3} + \underline{\underline{2\gamma_4 s^2}}$$

$\gamma_1 + \gamma_3 = 0$ $\qquad$ $\gamma_3 = 0$

$\gamma_2 + 2\gamma_4 = 0$ $\qquad$ $\gamma_4 = -\frac{1}{4}$

$4\gamma_1 = 0$ $\qquad$ $\gamma_1 = 0$

$4\gamma_2 = 2$ $\qquad$ $\gamma_2 = \frac{1}{2}$

Es. 3

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\, x(t)$$

$$\det(sI - A) = \det\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 4 & s+2 \end{pmatrix} =$$

$$= s\,(s^2 + 2s + 4)$$

poli $\quad p_1 = 0 \qquad p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3} = \underline{-1 \pm j\sqrt{3}}$

modi $\quad \mathbb{1}(t), \quad e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t), \quad e^{-t}\sin(\sqrt{3}\,t)$

$$Y_l(s) = C\,(sI - A)^{-1} x(0) =$$

$$= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{[1 \quad 0 \quad 0] \left[\mathrm{Agg}\begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 4 & s+2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}{s\,(s^2 + 2s + 4)}$$

$$\mathrm{Agg}(1,1) = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ 4 & s+2 \end{pmatrix} = s^2+2s+4$$

$$\mathrm{Agg}(2,1) = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & s+2 \end{pmatrix} = s+2 .$$

$$\mathrm{Agg}(3,1) = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$Y_l(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2+2s+4 & s+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}}{s(s^2+2s+4)} =$$

$$= \frac{x_1(0)(s^2+2s+4) + x_2(0)(s+2) + x_3(0)}{s(s^2+2s+4)}$$

Impongo che il numeratore abbia una radice in ϕ (vale ϕ per $s=0$)

$$\boxed{x_1(0)\cdot 4 + x_2(0)\cdot 2 + x_3(0) = 0}$$

Analisi modale nello spazio degli stati
(sistemi LTI a tempo continuo)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x_0}_{X_\ell(s)} + \underbrace{\left\{ (sI-A)^{-1}B \right\} U(s)}_{X_f(s)}$$

$$x_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}x_0\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x_0$$

Come è fatto $x_\ell(t)$?

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-esima}$$

$$x(0) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = e_1 \end{matrix} \longrightarrow x(t) = \phi_1(t)$$

$$x(0) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = e_2 \end{matrix} \longrightarrow x(t) = \phi_2(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$x(0) = e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = e_n \end{matrix} \longrightarrow x(t) = \phi_n(t)$$

$\phi_i(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi(t) = \left[\, \phi_1(t) \,\vdots\, \phi_2(t) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_n(t) \,\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$* \quad \dot{\Phi}(t) = \left[\, \dot{\phi}_1(t) \;\; \dot{\phi}_2(t) \;\; \cdots \;\; \dot{\phi}_n(t) \,\right] =$$

$$= \left[\, A\phi_1(t) \;\; A\phi_2(t) \;\; \cdots \;\; A\phi_n(t) \,\right] =$$

$$= A \left[\, \phi_1(t) \;\; \phi_2(t) \;\; \cdots \;\; \phi_n(t) \,\right] = A \cdot \Phi(t)$$

$$** \quad \Phi(0) = \left[\, \phi_1(0) \,\vdots\, \phi_2(0) \;\; \cdots \;\; \phi_n(0) \,\right] = I_{n \times n}$$

$\forall x_0$ può essere espresso come $x_0 = \Phi(0) \cdot x_0$

$\Rightarrow$ la soluzione $x(t)$ del problema di partenza

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$
$$x(0) = x_0$$

sarà $x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 =$

$$= \phi_1(t) \cdot x_{01} + \phi_2(t)\, x_{02} + \cdots + \phi_n(t)\, x_{0n}$$

$\Rightarrow$ principio di sovrapposizione degli effetti

(perché $x_0 = e_1 \cdot x_{01} + e_2\, x_{02} + \cdots + e_n\, x_{0n}$)

$$\Rightarrow \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1} \right]$$

Risultato:

$$\Phi(t) = I + A \cdot t + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i t^i}{i!} \triangleq e^{A \cdot t}$$ matrice esponenziale

Dim.

** per $t=0 \rightarrow \Phi(0) = I$

* $$\dot{\Phi}(t) = A + A^2 \frac{t}{1!} + A^3 \frac{\cancel{3}t^2}{\cancel{3!}\,2!} + \dots + A^k \frac{\cancel{k} \cdot t^{k-1}}{\cancel{k!}\,(k-1)!} + $$

$$= A \left\{ I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right\}$$

$$= A \cdot \Phi(t)$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Nel dominio del tempo, la risposta libera è data da

$$x_\ell(t) = e^{At} \cdot x_0 \qquad y_\ell(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0$$

Per la risposta forzata

$$\bar{X}_f(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot U(s)$$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} \cdot B \cdot u(\sigma)\, d\sigma$$

$$y_f(t) = Cx_f(t) + Du(t) =$$

$$= C\int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma)\,d\sigma + Du(t)$$

Proprietà di e^{At}

1) $e^{A\cdot 0} = I$

2) $e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$ se e solo se $A\cdot B = B\cdot A$

3) $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$

$$e^{At}\cdot e^{-At} \underset{\uparrow}{=} e^{(A+(-A))\cdot t} = I$$

perché A e $-A$ commutano!

4) $\frac{d}{dt}e^{At} = A\cdot e^{At}$ (soluzione di $\dot{\Phi} = A\cdot\Phi$)

5) $A\cdot v = \lambda\cdot v \Rightarrow e^{At}\cdot v = e^{\lambda t}\cdot v$

$v \in \mathbb{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ A e e^{At} hanno gli stessi autovettori

$\Rightarrow$ ~~gli autovalori di e^{At} sono $e^{\lambda t}$, dove~~

se λ è autovalore di A, $e^{\lambda t}$ è autovalore di e^{At}

(basata sul fatto che $A^k v = \lambda^k v$)

6) Sia T, $\det T \neq 0$ e

$$A = T \cdot \bar{A} \, T^{-1} \Rightarrow e^{At} = T e^{\bar{A}t} \cdot T^{-1}$$

Analisi modale

Caso ~~A~~ 1: matrice A diagonalizzabile

$$\exists T : \quad A = T \cdot \Lambda \, T^{-1} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot T = T \cdot \Lambda$$

$$T = [v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n] \qquad v_i : \text{autovettori di } A$$

$$e^{At} = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

WARNING

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad e^{At} \neq \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & e^{a_{12}t} \\ e^{a_{21}t} & e^{a_{22}t} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\text{No!}}}$$

Se la matrice A è diagonalizzabile, i modi del sistema sono del tipo $e^{\lambda_i t}$, dove λ_i è autovalore di A.

$$x_\ell(t) = e^{At} \cdot x_\emptyset$$

Caso diagonalizzabile: $e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$

$T = [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n]$

$$x_\ell(t) = T \cdot e^{\Lambda t} \underbrace{T^{-1} x_\emptyset}_{\alpha} =$$

$\alpha = T^{-1} x_\emptyset$

$$= [v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \cdot e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Caso 2: matrice A non diagonalizzabile

$\rightarrow$ $\exists$ un autovalore λ di A tale che

molt. algebrica di λ > molt. geometrica di λ

molt. geometrica = dim Ker $(\lambda I - A)$

$\exists$ T, det T $\neq 0$ tale che

$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$ dove J è in forma di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & J_r \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & & & \\ \vdots & & e^{J_3 t} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & e^{J_r t} \end{bmatrix}$$

$$
e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \ddots & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}
$$

Un blocco di Jordan di dimensione m, relativo all'autovalore λ, genera i modi

$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots t^{m-1} e^{\lambda t}$

Carattere di convergenza dei modi

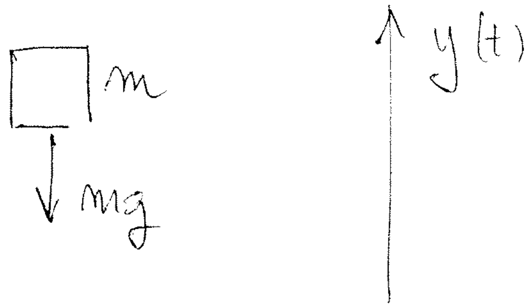
$Re[\lambda_i] < 0 \rightarrow$ modi convergenti

$Re[\lambda_i] = 0$, e molt.alg.(λ_i) = molt.geo.(λ_i) $\rightarrow$ modi limitati non convergenti

In tutti gli altri casi modi divergenti

($Re[\lambda_i] > 0$; $Re[\lambda_i] = 0$ + molt.alg.(λ_i) > molt.geo.(λ_i)

Esempio: grave in caduta libera



$$\ddot{y}(t) = -g \longrightarrow \dddot{y}(t) = \emptyset$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$\lambda = 0$, molt. alg. $= 3$
molt. geo. $= 1$ $(A = J!)$

modi: $\mathbb{1}(t)$, $t \cdot \mathbb{1}(t)$, $t^2 \mathbb{1}(t)$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

esempio: $x(0) = \begin{bmatrix} h \\ \emptyset \\ -g \end{bmatrix}$

$$x_l(t) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} h - g\frac{t^2}{2} \\ -gt \\ -g \end{bmatrix}$$

TRAIETTORIE NELLO SPAZIO DEGLI STATI

Al variare di t, lo stato $x(t)$ disegna una "traiettoria" in $\mathbb{R}^n$ (n = dimensione di x)

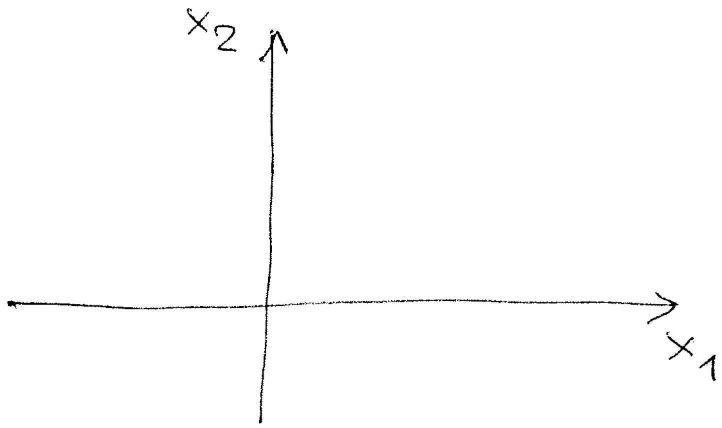
Caso $\underline{n=2}$

Esempio:

$$\overset{\circ}{x}(t) = A\,x(t) \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1(t) \\ \overset{\circ}{x}_2(t) &= \lambda_2 x_2(t) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda_1 t}\cdot x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\cdot x_2(0) \end{aligned}$$

spazio degli stati



$$\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} = \lambda_1 t$$

$$t = \frac{1}{\lambda_1}\cdot \ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}$$

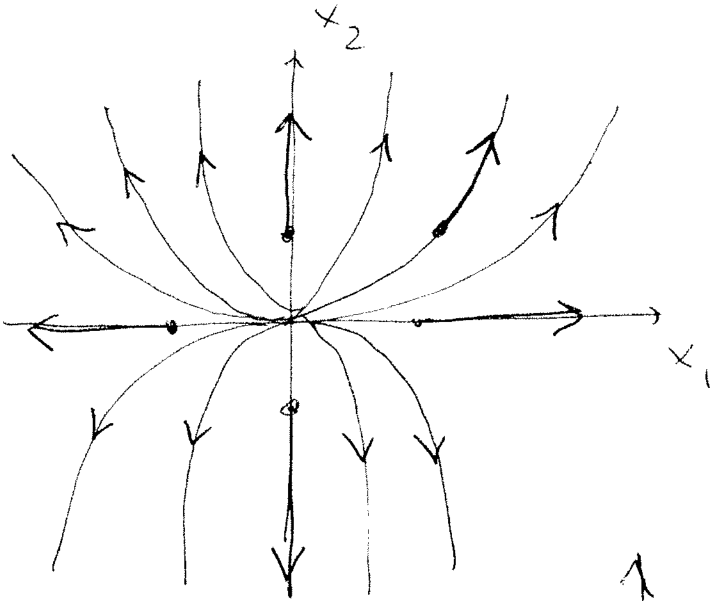
$$\Downarrow$$

$$x_2 = e^{\lambda_2 \cdot \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{x_1}{x_1(0)}} \cdot x_2(0)$$

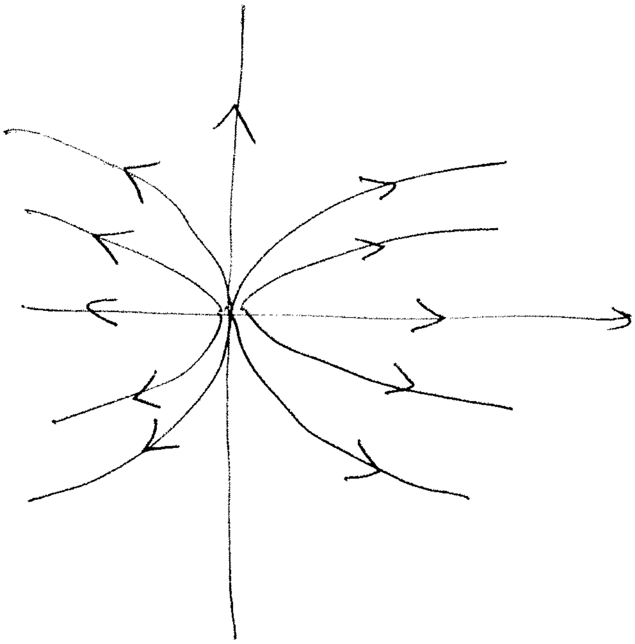
$$\frac{x_2}{x_2(0)} = \left(e^{\ln \frac{x_1}{x_1(0)}}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \longrightarrow \frac{x_2}{x_2(0)} = \left(\frac{x_1}{x_1(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$x_2 = \gamma\, x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \qquad \gamma = \frac{x_2(0)}{(x_1(0))}$$

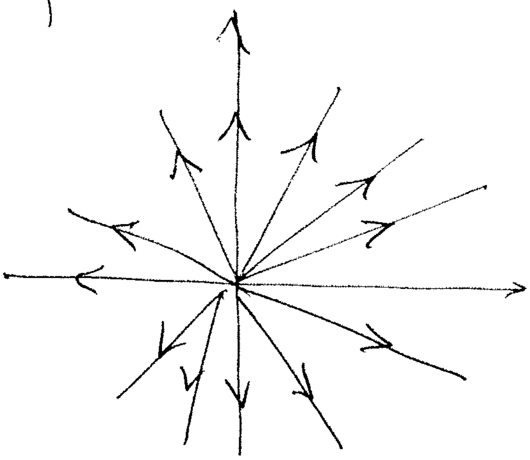
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



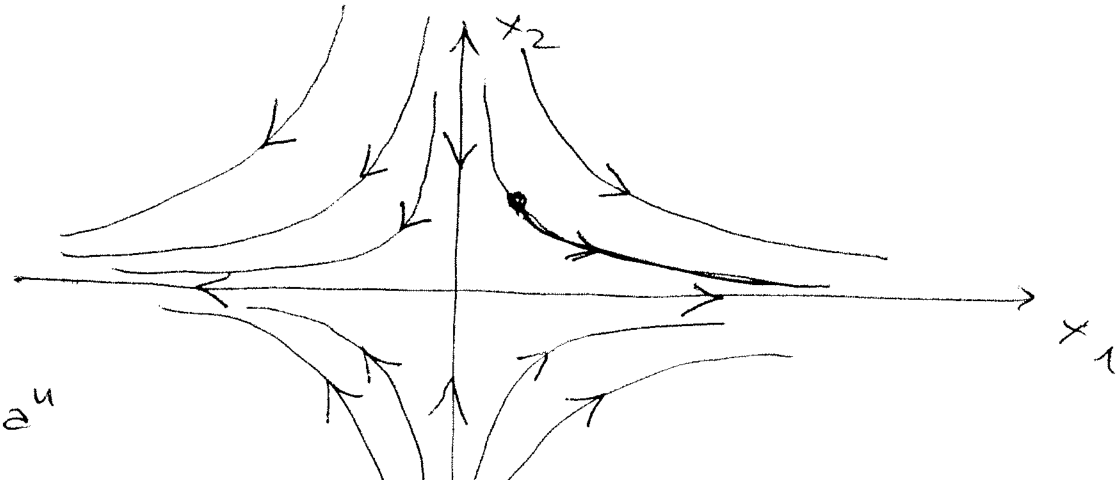
"nodi"



$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ... basta invertire le frecce!

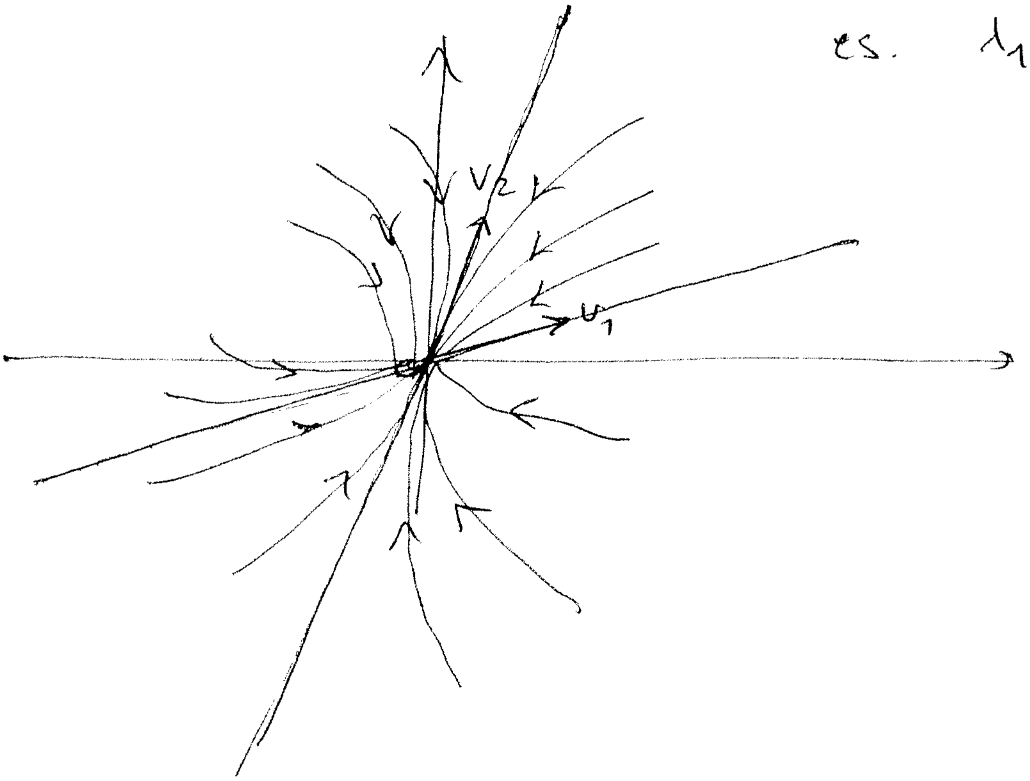
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$



"sella"

Per una generica matrice A con autovalori reali λ_1, λ_2 e autovettori v_1, v_2, avrò gli stessi disegni, ma rispetto al sistema di riferimento v_1, v_2

es. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



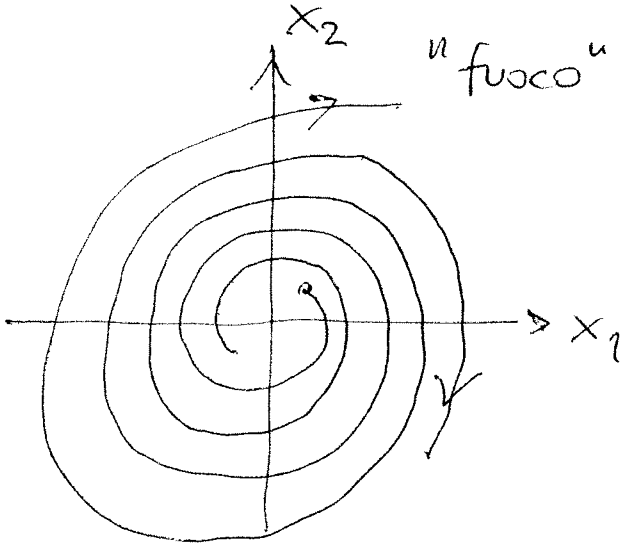
Coppia di poli complessi coniugati

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \qquad A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

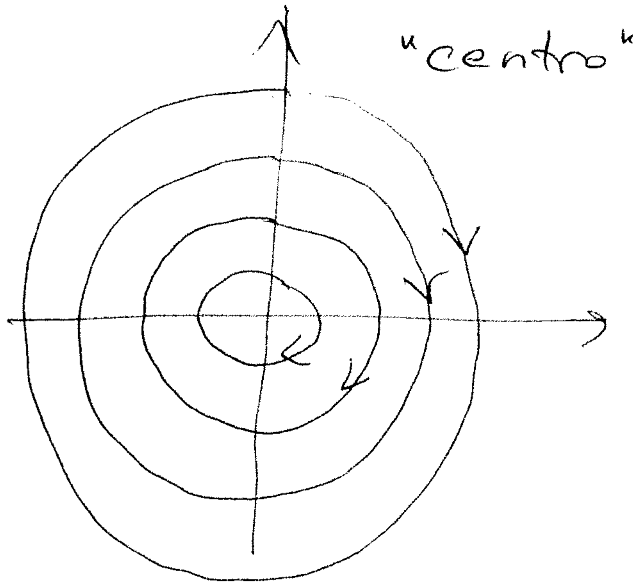
$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-\sigma & -\omega \\ \omega & \lambda-\sigma \end{pmatrix} = (\lambda-\sigma)^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \Rightarrow \text{modi: } \begin{array}{l} e^{\sigma t}\cos(\omega t) \\ e^{\sigma t}\sin(\omega t) \end{array}$$

$\sigma > 0$



$\sigma = 0$



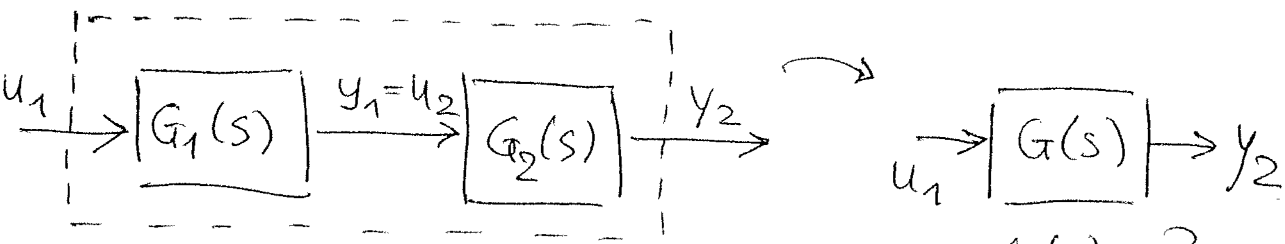
$\sigma < 0$: inverto le frecce!

INTERCONNESSIONE DI SISTEMI DINAMICI

I sistemi dinamici "complessi" (formati da tanti sottosistemi collegati tra loro) possono essere ricondotti alla combinazione di tre interconnessioni elementari:

1) Serie
2) Parallelo
3) Retroazione (feedback)

1) Interconnessione in serie

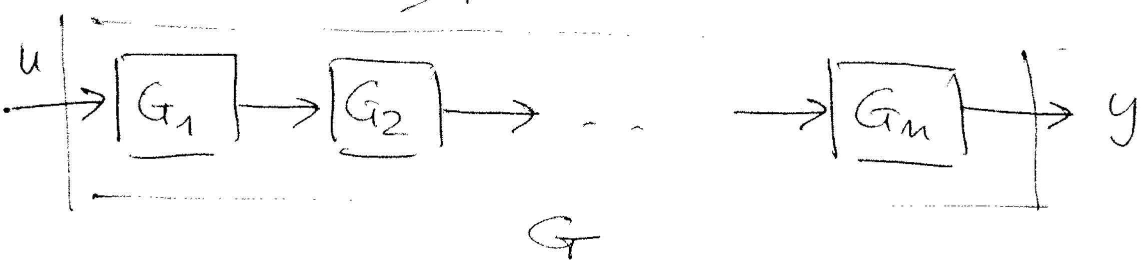


$\underline{G(s) = ?}$

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s) \cdot U_1(s) & 1^\circ \text{ blocco} \\ Y_2(s) = G_2(s) \cdot U_2(s) & 2^\circ \text{ blocco} \\ U_2(s) = Y_1(s) & \text{serie} \end{cases}$$

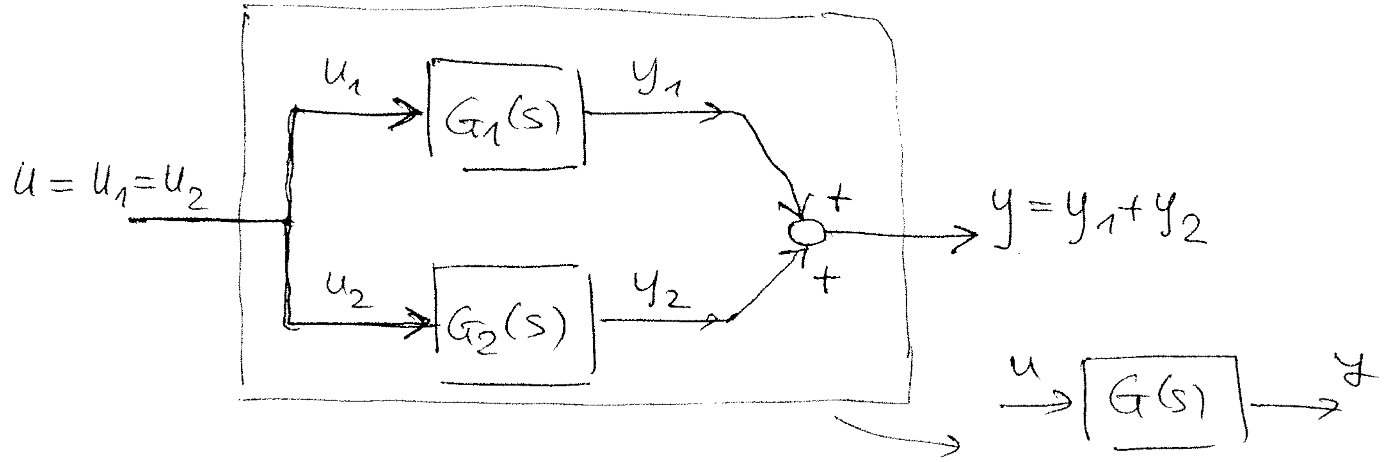
$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{G_2(s) \cdot U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{G_2(s) \cdot Y_1(s)}{U_1(s)} =$$

$$= \frac{G_2(s)\, G_1(s) \cdot \cancel{U_1(s)}}{\cancel{U_1(s)}} = G_2(s)\, G_1(s)$$



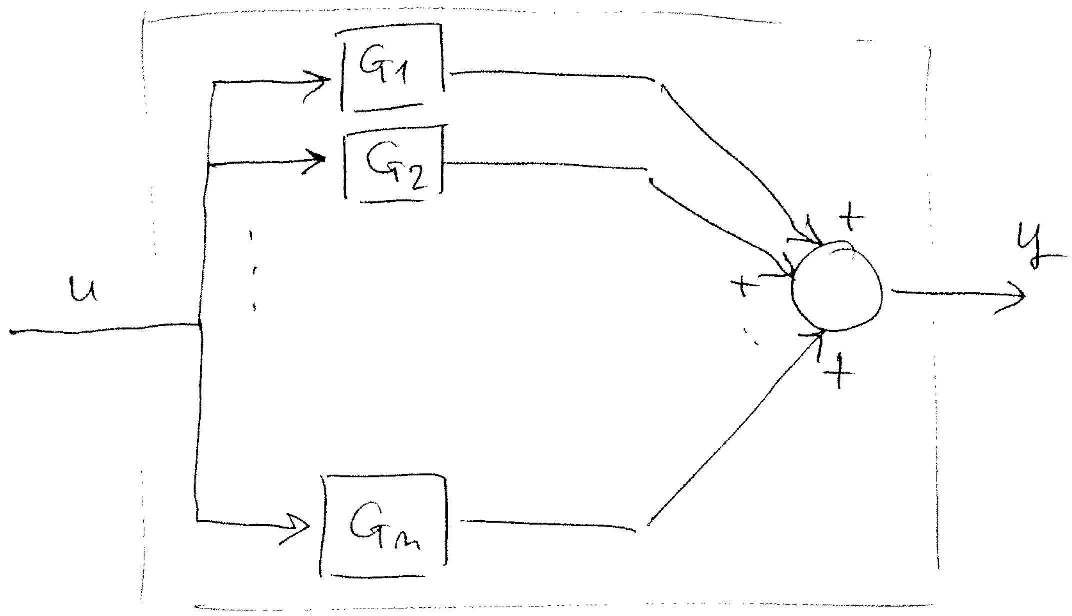
$$G = G_n \cdot G_{n-1} \cdot \ldots \cdot G_2 \cdot G_1$$

2) Interconnessione in parallelo



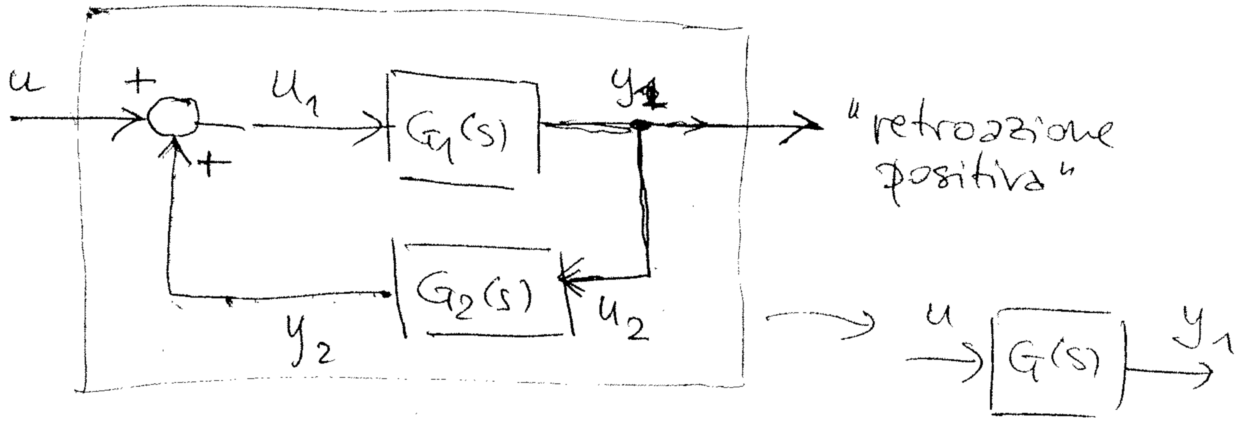
$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s)\, U_1(s) \\ Y_2(s) = G_2(s)\, U_2(s) \\ U_1(s) = U_2(s) = U(s) \\ Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)\cancel{U_1(s)} + G_2(s)\cancel{U_2(s)}}{\cancel{U(s)}} = G_1(s) + G_2(s)$$



$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_m$$

3) Interconnessione in retroazione



$$\begin{cases} Y_1(s) = G_1(s)\,U_1(s) & \text{1° blocco} \\ Y_2(s) = G_2(s)\,U_2(s) & \text{2° blocco} \\ U_2(s) = Y_1(s) & \text{derivazione} \\ U_1(s) = U(s) + Y_2(s) & \text{sommatore} \end{cases}$$

$$Y_1(s) = G_1(s)\cdot U_1(s) = G_1(s)\left[U(s) + Y_2(s)\right] = $$
$$= G_1(s)\left[U(s) + G_2(s)\,Y_1(s)\right]$$

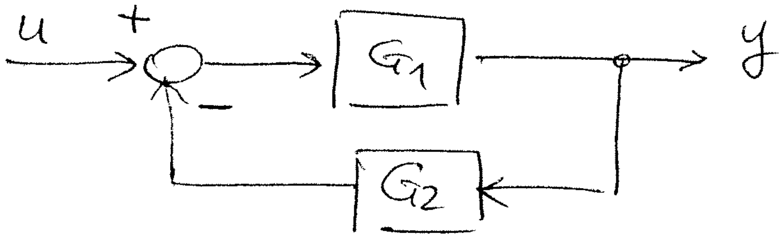
$$Y_1(s) - G_1(s)\,G_2(s)\,Y_1(s) = G_1(s)\,U(s)$$

$$\left[1 - G_1(s)\,G_2(s)\right] Y_1(s) = G_1(s)\,U(s)$$

$$Y_1(s) = \underbrace{\frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)\,G_2(s)}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

[sistemi SISO]

retroazione negativa



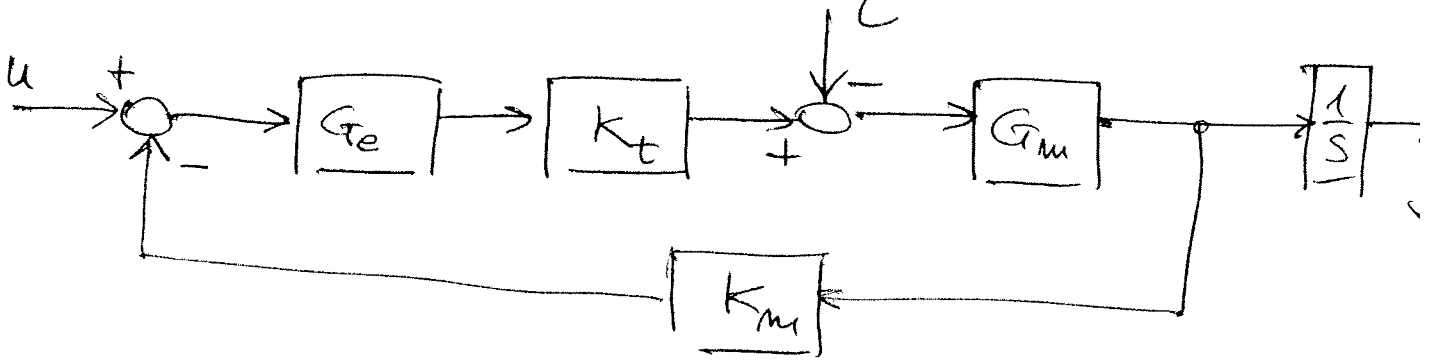
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Nel caso MIMO:

$$Y_1(s) = \left[I \pm G_1(s)G_2(s) \right]^{-1} G_1(s)\, U(s)$$

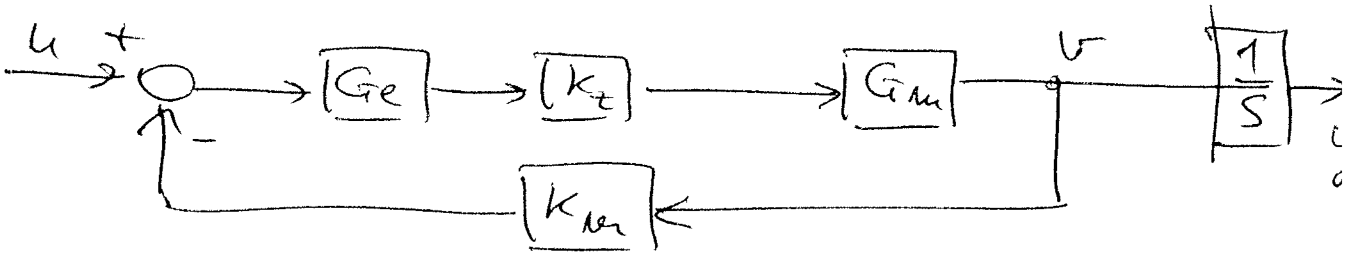
+ per retroazione negativa
− per retroazione positiva

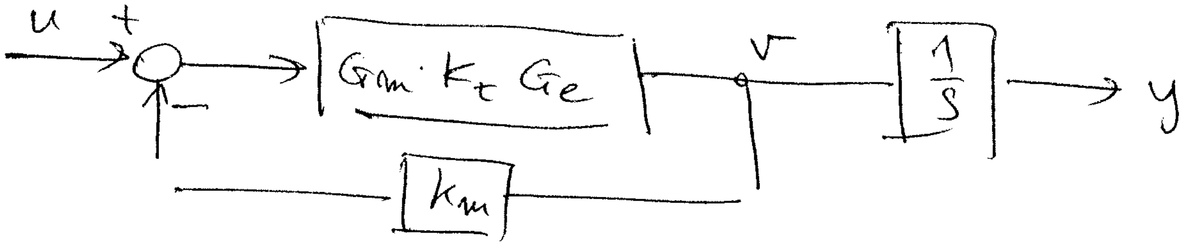
Esempio

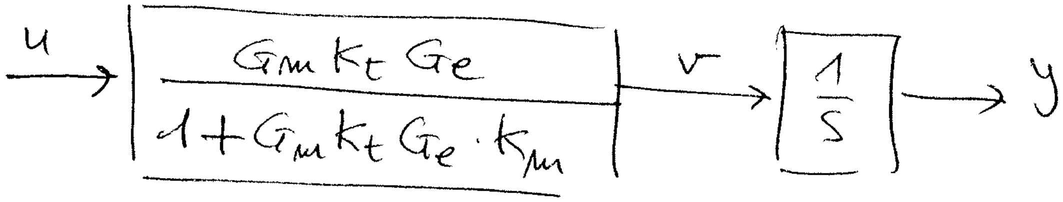


$$Y(s) = \underbrace{G_{u\to y}}(s)\, U(s) + \underbrace{G_{c\to y}}(s) \cdot C(s)$$

$G_{u\to y}$ $(c=0)$

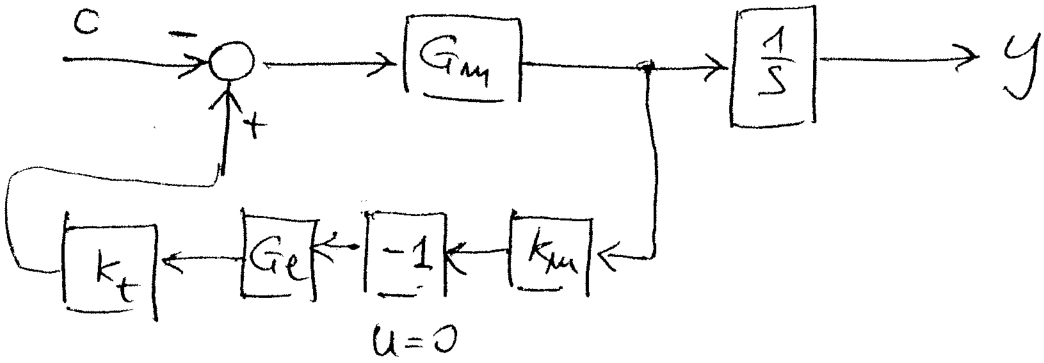


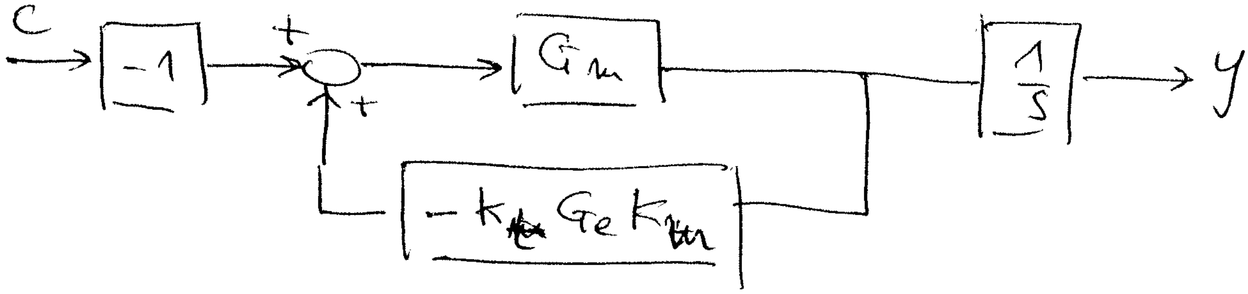


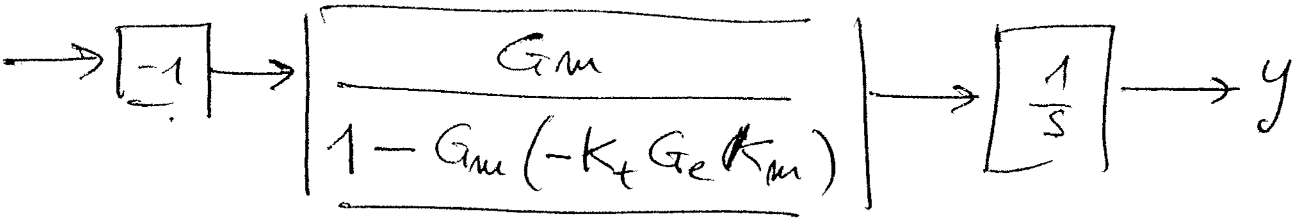


$$G_{u\to y}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{G_m K_t G_e}{1 + G_m K_t G_e K_m}$$

$G_{c \to y}$ $(u=0)$

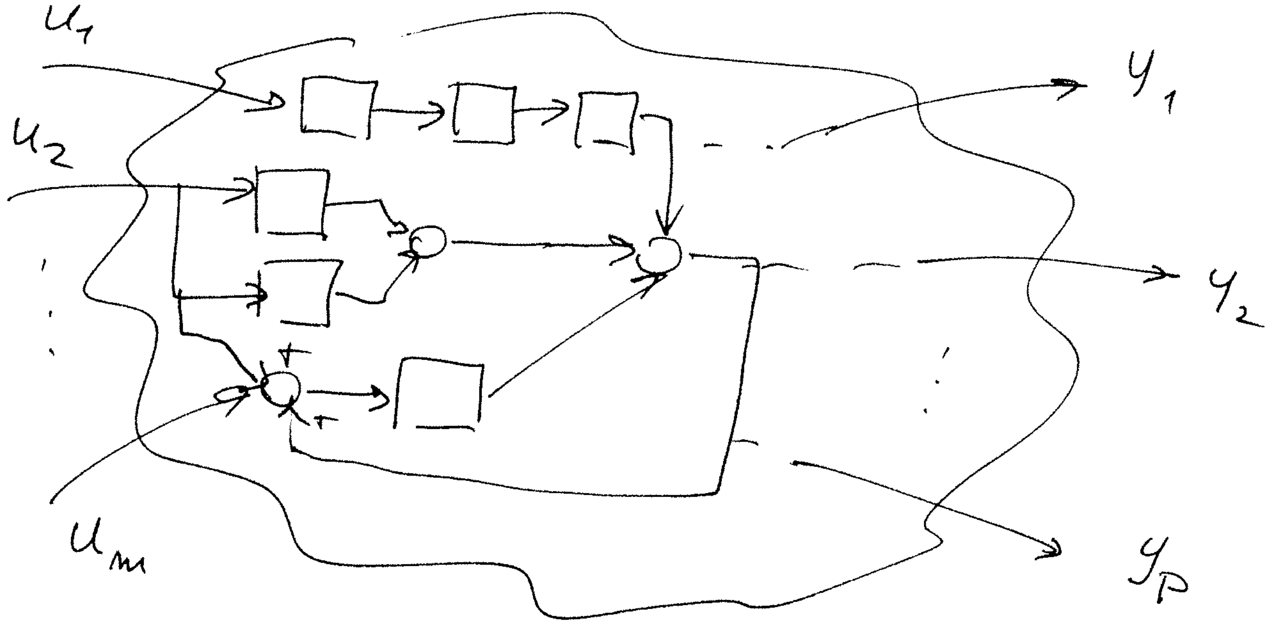






$$G_{c \to y} = -\frac{1}{s} \cdot \frac{G_m}{1 + G_m K_t G_e K_m}$$

Sistema complesso



* Se tutti i sottosistemi sono LTI, è possibile calcolare la funzione di trasferimento $G_{ij}(s)$ da qualunque ingresso $u_j(t)$ a qualunque uscita $y_i(t)$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

* Strumenti di calcolo: Simulink, Scicos ...

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA

Sistema LTI: $\quad u \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y$

Ingresso sinusoidale: $\quad u(t) = M \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$

M: ampiezza $\quad \omega$: pulsazione

Ipotesi: tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa
($\rightarrow$ modi del sistema tutti convergenti)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad Re[p_i]<0 \quad \forall i$$

Calcolo la risposta forzata

$$Y_f(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot M \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{\bar{N}(s)}{D(s)} + \frac{R}{s-j\omega} + \frac{\bar{R}}{s+j\omega}$$

$$R = \lim_{s\to j\omega} (s-j\omega)\cdot Y_f(s) = \lim_{s\to j\omega} G(s)\cdot M\,(s-j\omega)\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$= \lim_{s\to j\omega} G(s)\cdot M\,\frac{s}{s+j\omega} = G(j\omega)\cdot M \cdot \frac{j\omega}{2j\omega} =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot G(j\omega) \qquad\qquad \bar{R} = \frac{M}{2}\,\overline{G(j\omega)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\bar{N}(s)}{D(s)}\right] = y_T(t)$$ è tale che $\lim_{t \to +\infty} y_T(t) = \emptyset$

$$\begin{aligned}
y_f(t) &= y_T(t) + R e^{j\omega t} + \bar{R} e^{-j\omega t} = \\
&= y_T(t) + \frac{M}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} + \frac{M}{2} \overline{G(j\omega)} e^{-j\omega t} = \\
&= y_T(t) + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{j\measuredangle G(j\omega)} e^{j\omega t} + \\
&\quad + \frac{M}{2} |G(j\omega)| e^{-j\measuredangle G(j\omega)} e^{-j\omega t} = \\
&= y_T(t) + M |G(j\omega)| \left\{ \frac{e^{j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))} + e^{-j(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_f(t) = \underbrace{y_T(t)}_{\text{risposta di regime transitorio}} + \underbrace{M |G(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle G(j\omega))}_{y_{perm}(t)\ \text{risposta di regime permanente}}}$$

1) La pulsazione della risposta di regime permanente è la stessa dell'ingresso

2) L'ampiezza M viene moltiplicata per $|G(j\omega)|$

3) La fase viene sfasata di $\measuredangle G(j\omega)$

$u(t) = M\cos(\omega t + \varphi)$

$\rightarrow \; y_{perm}(t) = M\,|G(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle G(j\omega))$

Le funzioni di ω, $|G(j\omega)|$ e $\angle G(j\omega)$ ci dicono come i segnali sinusoidali vengono amplificati e sfasati in funzione della pulsazione ω ($\rightarrow$ diagrammi di Bode)

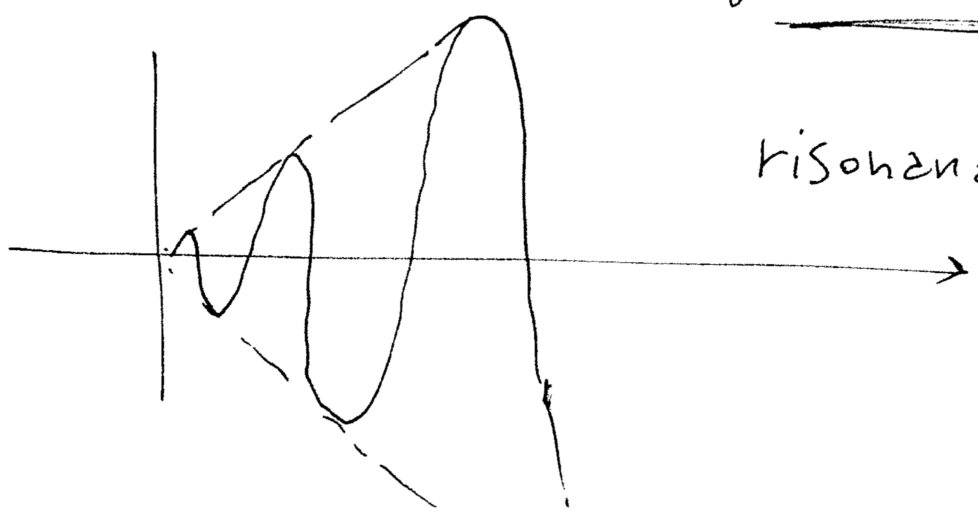
Cosa succede se $G(s)$ ha una coppia di poli complessi coniugati proprio in $\pm j\omega$?

$$G(s) = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{N(s)}{\bar{D}(s)(s^2+\omega^2)}$$

$$u(t) = M\cos(\omega t) \rightarrow U(s) = M\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{N(s)\cdot M\cdot s}{\bar{D}(s)\cdot(s^2+\omega^2)^2}$$

$y_f(t) =$ roba che va a zero $+ \underline{\gamma\, t\cos(\omega t + \phi)}$



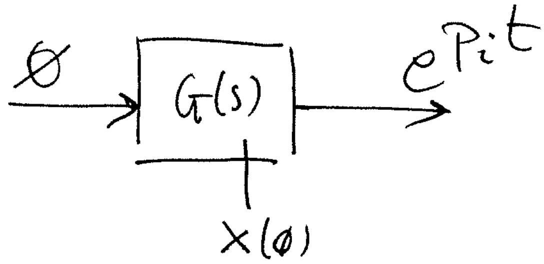
risonanza!

Interpretazione fisica di poli e zeri della funzione di trasferimento

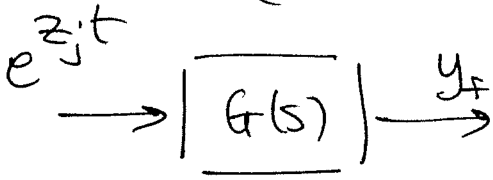
$$G(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2) \cdots (s-z_R)}{(s-p_1)(s-p_2) \cdots (s-p_n)}$$

z_j : zeri della funzione di trasferimento
p_i : poli " " " "

polo in p_i → il sistema è in grado di generare il segnale $e^{p_i t}$



zero in z_j → il segnale di ingresso $e^{z_j t}$ non si trasferisce all'uscita ("blocking zeros")



$y_f(t)$ non contiene il modo $e^{z_j t}$

$$\mathcal{L}\left[e^{z_j t}\right] = \frac{1}{s-z_j}$$

$$Y_f(s) = G(s)\frac{1}{s-z_j} = K\,\frac{\cdots\cancel{(s-z_j)}\cdots}{\cdots}\;\frac{1}{\cancel{s-z_j}}$$