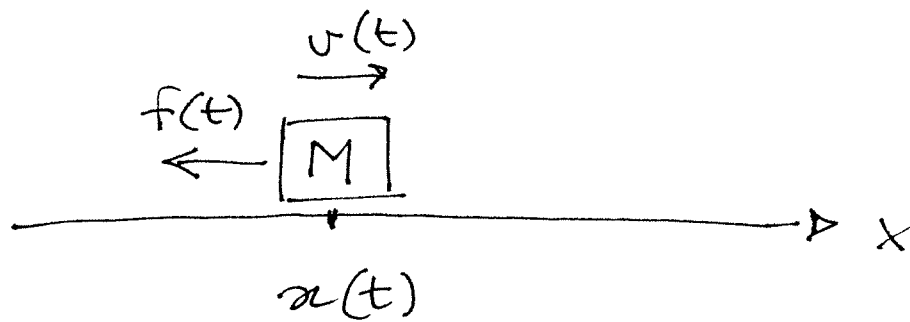


Rappresentazione dei sistemi dinamici



t : tempo

$x(t)$: posizione all'istante t

$v(t)$: velocità " " "

$f(t)$: forza esercitata sul corpo @ t

$$M \cdot \dot{v}(t) = -f(t)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$v(t_0) = v_0$$

Problema: noto $f(t)$, determinare $v(t)$, $\forall t > t_0$

Ipotesi: $f(t) = u(t, v(t))$

Esempio 1

$$u(t, v(t)) = h \cdot v(t)$$

$$h > 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} M \dot{v}(t) = -h \cdot v(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Forma
implicita!

Soluzione:

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = -h \cdot v$$

$$M \cdot \frac{1}{v} dv = -h dt$$

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{v} dv = \int_{t_0}^t \left(-\frac{h}{M}\right) \cdot 1 \cdot dt$$

$$\ln v \Big|_{t_0}^t = -\frac{h}{M} \cdot t \Big|_{t_0}^t$$

$$\ln v(t) - \ln v(t_0) = -\frac{h}{M} (t - t_0)$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} = -\frac{h}{M} (t - t_0)$$

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} = e^{-\frac{h}{M} (t - t_0)}$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) e^{-\frac{h}{M} (t - t_0)}} \quad \text{Forma esplicita!}$$

Sistema lineare e tempo-invariante (LTI)

Esempio 2

$$u(t, v(t)) = + h (1 + \varepsilon \cdot \cos \omega t) \cdot v(t)$$

$$\begin{cases} M \dot{v}(t) = - \underbrace{h (1 + \varepsilon \cos \omega t)}_{a(t)} \cdot v(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

$$v(t) = v(t_0) e^{-\frac{h}{M}(t-t_0)} e^{-\frac{h\varepsilon}{M\omega}(\sin \omega t - \sin \omega t_0)}$$

$$\rightarrow M \dot{v}(t) = - a(t) \cdot v(t)$$

Sistema lineare tempo-variante

Esempio 3

$$u(t, v(t)) = + h \cdot \sqrt{v(t)}$$

$$\begin{cases} M \dot{v}(t) = - h \cdot \sqrt{v(t)} \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Sistema non lineare, tempo-invariante

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = - h \cdot \sqrt{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v}} \cdot dv = - \frac{h}{M} dt$$

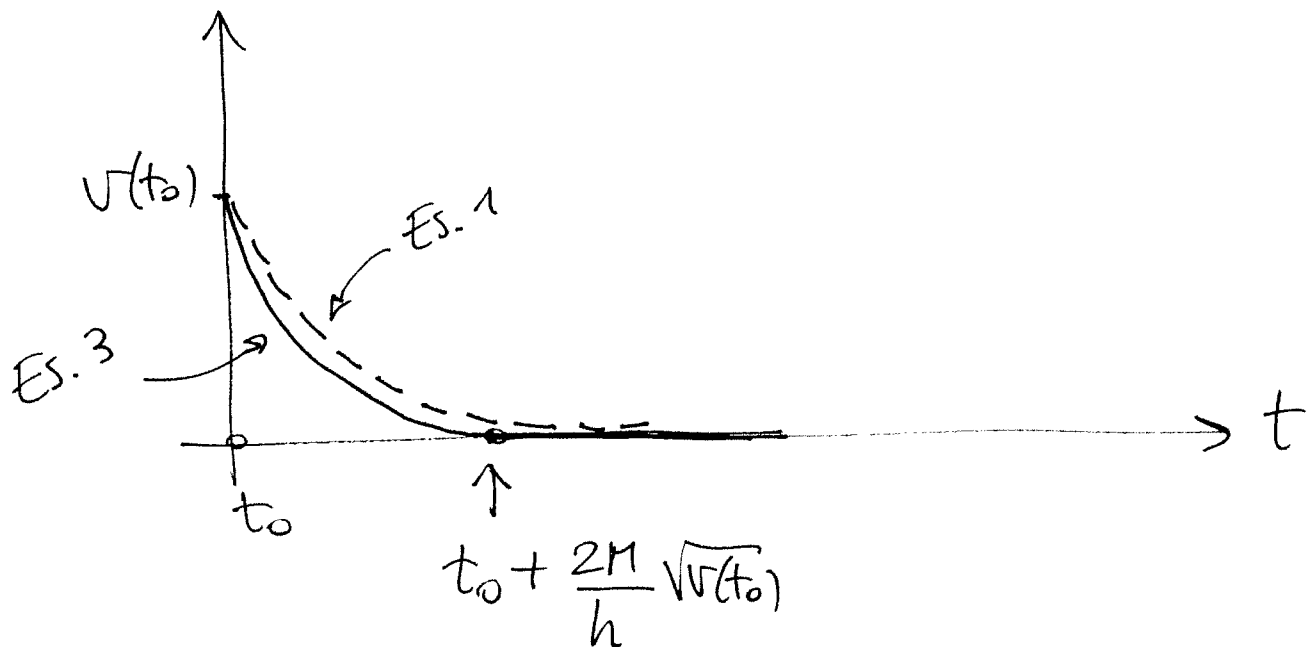
$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{v}} dv = \int_{t_0}^t \left(-\frac{h}{M}\right) dt$$

$$2 \sqrt{v} \Big|_{t_0}^t = -\frac{h}{M} (t-t_0)$$

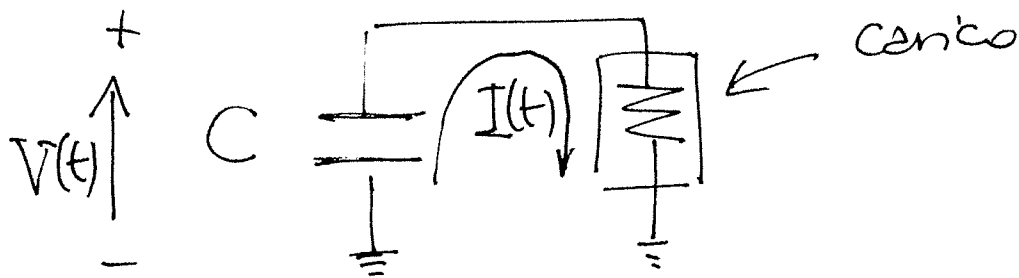
$$\sqrt{v(t)} - \sqrt{v(t_0)} = -\frac{h}{2M} (t-t_0)$$

$$\sqrt{v(t)} = \sqrt{v(t_0)} - \frac{h}{2M} (t-t_0)$$

$$v(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{v(t_0)} - \frac{h}{2M} (t-t_0) \right)^2 & \text{se } \sqrt{v(t_0)} - \frac{h}{2M} (t-t_0) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempio: scarica del condensatore



$V(t)$: tensione all'istante t

$I(t)$: corrente all'istante t

Dalla Fisica

$$C \cdot \frac{d}{dt} V(t) = -I(t) = -g(t, V(t))$$

↖ caratteristica
del carico

Se il carico è una resistenza R ,

$$g(t, V(t)) = \frac{V(t)}{R}$$

Sostituendo,

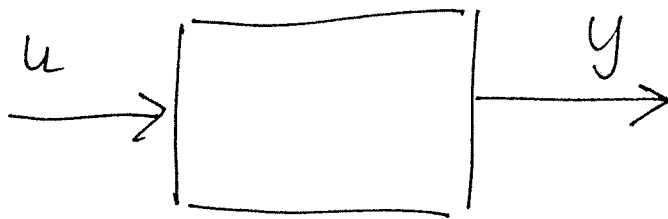
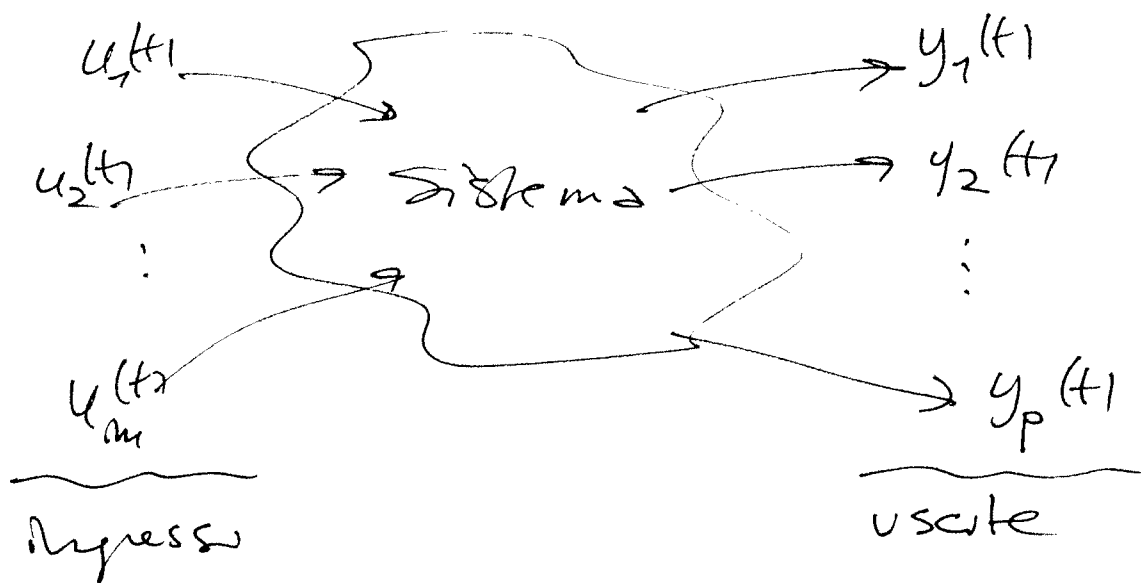
$$\begin{cases} C \cdot \dot{V}(t) = -\frac{1}{R} \cdot V(t) \\ V(t_0) = V_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{V(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}}$$

Rappresentazione ingresso-uscita

Variabili di ingresso: grandezze che agiscono sul sistema dall'esterno ("cause")

Variabili di uscita: grandezze interne al sistema sulle quali mi interessa analizzare l'andamento



Per la classe di sistemi in cui $t \in \mathbb{R}$
(sistemi a tempo continuo), la rappresentazione i/o è data da una o più equazioni che coinvolgono gli ingressi, le uscite, e le loro derivate:

$$h(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(m)}(t), t) =$$

$$\text{dove } y^{(n)}(t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} y(t) \quad u^{(m)}(t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} u(t)$$

per la causalità $\rightarrow n \geq m$

Esempio (massa)

Variabile di uscita : $x(t)$ (posizione)

$$v(t) = \dot{x}(t) \rightarrow x(t) = \int_{t_0}^t v(\sigma) d\sigma + x(t_0)$$

$$\boxed{M \ddot{x}(t) = -\hat{f}(t)} \quad \text{rappresentazione i/o}$$

ingresso : $u(t) = \hat{f}(t)$

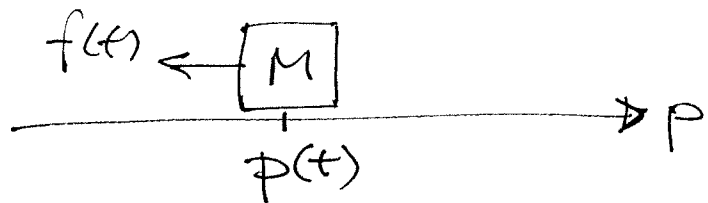
uscita : $y(t) = x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t v(t_0) e^{-\frac{h}{M}(\sigma-t_0)} d\sigma + x(t_0) = \\ &= v(t_0) \cdot \left(-\frac{M}{h}\right) e^{-\frac{h}{M}(\sigma-t_0)} \Big|_{t_0}^t + x(t_0) = \\ &= x(t_0) + \frac{M}{h} v(t_0) \left\{ 1 - e^{-\frac{h}{M}(t-t_0)} \right\} \end{aligned}$$

Rappresentazione ingresso-stato-uscita (i/s/o)

Variabili di stato $x(t)$: insieme delle variabili che è necessario conoscere al tempo t , per poter determinare l'evoluzione del sistema $\forall \tau > t$, note le variabili di ingresso.

Esempio



$$M \ddot{p}(t) = -f(t)$$

$$x_1(t) = p(t) \quad \text{posizione}$$

$$x_2(t) = \dot{p}(t) = v(t) \quad \text{velocità}$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{p}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{p}(t) = -\frac{1}{M} \cdot \overset{u}{f}(t)$$

$u(t) = f(t)$
(ingresso)

$$y(t) = p(t) = x_1(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{1}{M} u(t) \\ \underline{y(t) = x_1(t)} \end{cases}$$

Rapp. i/s/o

In generale, un sistema avente ingressi $u_i(t)$, uscite $y_i(t)$ e variabili di stato $x_i(t)$ ammette una rappresentazione i/s/o della forma:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ingressi} : u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t) \\ \text{Uscite} : y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t) \\ \text{Stati} : x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \end{array} \right)$$

~~$x_1(t)$~~

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

⋮

$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

⋮

$$y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_m(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

Notazione vettoriale

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Rappr.} \\ \text{c/s/o.} \end{array}$$

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Caso notevole: sistemi LTI

→ le funzioni $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono lineari e non dipendono da t

Posso scriverle come

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{n \times 1} = \underbrace{A}_{n \times n} \cdot \underbrace{x(t)}_{n \times 1} + \underbrace{B}_{n \times m} \cdot \underbrace{u(t)}_{m \times 1}$$

$$\underbrace{y(t)}_{p \times 1} = \underbrace{C}_{p \times n} \cdot \underbrace{x(t)}_{n \times 1} + \underbrace{D}_{p \times m} \cdot \underbrace{u(t)}_{m \times 1}$$

Caso notevole: sistemi LTI, rappr. i/o

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) &= \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

dove i coefficienti a_i, b_i sono costanti reali

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t) \quad (n \geq m)$$

n : ordine del sistema

→ Esempio:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad n=2$$

$$p=1 \quad m=1 \quad (\text{systeme SISO})$$

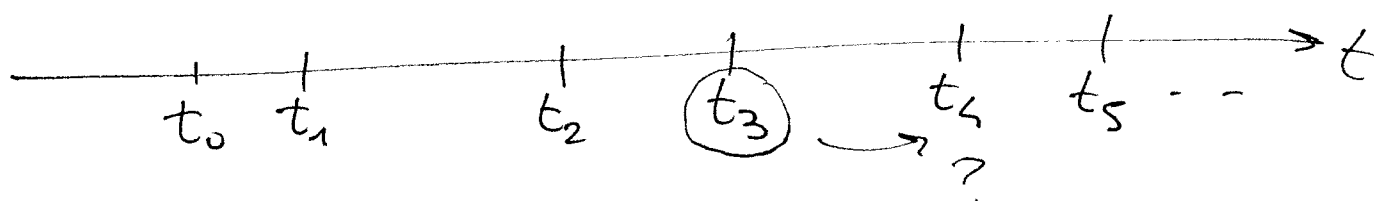
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u(t)$$

Sistemi a tempo-continuo : $t \in \mathbb{R}$

→ le variabili continue che cambiano con continuità nel tempo

Sistemi a tempo-discreto



Esempio : conto in banca

$C(t_k)$: quantità di denaro presente all'istante t_k

$u(t_k)$: "versamento" effettuato all'istante t_k

$$C(t_{k+1}) = (1 + f_k) (C(t_k) + u(t_k)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

f_k : tasso di interesse nel periodo $[t_k, t_{k+1})$

Per comodità, poniamo il tempo $k \in \mathbb{Z}$
e scriviamo

$$C(k+1) = (1 + f_k) (C(k) + u(k))$$

$$C(k) = (1 + f_{k-1}) (C(k-1) + u(k-1))$$

Passaggio alla forma esplicita ("solution")

Per semplicità: $f_k = f \quad \forall k$ (Costante $\rightarrow$ LTI)

Sia $k=0$ l'istante iniziale e sia $C(0)$ il deposito iniziale.

$$k=0: \quad C(1) = (1+f)(C(0) + u(0))$$

$$\begin{aligned} k=1: \quad C(2) &= (1+f)(C(1) + u(1)) = \\ &= (1+f) \{ (1+f)C(0) + (1+f)u(0) + u(1) \} \\ &= (1+f)^2 C(0) + (1+f)^2 u(0) + (1+f)u(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=2: \quad C(3) &= (1+f)(C(2) + u(2)) = \dots \\ &= (1+f)^3 C(0) + (1+f)^3 u(0) + (1+f)^2 u(1) + (1+f)u(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

per il generico k :

$$\begin{aligned} C(k) &= (1+f)^k C(0) + (1+f)^k u(0) + (1+f)^{k-1} u(1) + \dots \\ &\quad + \dots + (1+f)^2 u(k-2) + (1+f)u(k-1) = \\ &= (1+f)^k C(0) + \sum_{j=0}^{k-1} (1+f)^{k-j} u(j) \end{aligned}$$

Rappresentazione i/o Sistemi Tempo-Discreto

$$h(y(k), y(k-1), \dots, y(k-m), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m), k) =$$

Rappresentazione i/s/o Sistemi Tempo-Discreto

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Esempio : corso di laurea

$x_i(k)$: numero di studenti iscritti all' i -esimo anno ($i=1,2,3$), nell'anno accademico k

$u(k)$: numero di studenti che si iscrivono al 1° anno, nell'anno accademico $k+1$

$y(k)$: laureati nell'anno accademico k

$$x_1(k+1) = u(k) + \beta \cdot x_1(k)$$

$$x_2(k+1) = \alpha \cdot x_1(k) + \beta \cdot x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = \alpha \cdot x_2(k) + \beta \cdot x_3(k)$$

$$y(k) = \alpha \cdot x_3(k)$$

rappresentazione i/s/o

$$X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

variabili
di stato
del sistema

Sistemi LTI a tempo-discreto

Rapp. i/o

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_j u(k-j)$$

$$(a_0 = 1)$$

$$a_i, b_j \in \mathbb{R} \quad (\text{costanti!})$$

Rapp. i/s/o

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases}$$

Proprietà dei sistemi dinamici

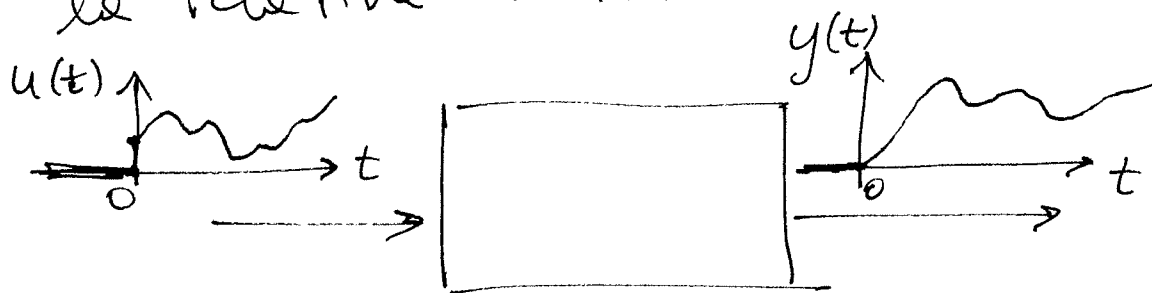
1) Causalità

Le variabili di ingresso $u(t)$, all'istante t , non influenzano il valore delle variabili di stato $x(\tau)$ e di uscita $y(\tau)$, $\forall \tau \leq t$.

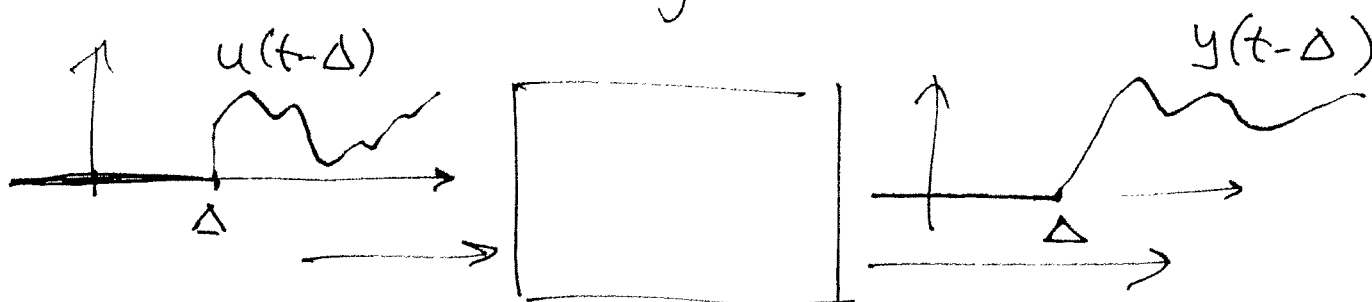
2) Tempo-invarianza (o stazionarietà)

Il comportamento del sistema è invariante rispetto a traslazioni dell'asse dei tempi.

Sia $u(t)$, $t \geq 0$ l'ingresso e $y(t)$, $t \geq 0$ la relativa uscita



Se il sistema è tempo-invariante, applicando l'ingresso $u(t-\Delta)$, si ottiene l'uscita $y(t-\Delta)$, $\forall \Delta \in \mathbb{R}$



3) Linearità

Le funzioni $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $g(\cdot, \cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot, \cdot)$
 sono funzioni lineari delle variabili
 u, y, x .

Per i sistemi lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sia $u^{(A)}(t)$ un segnale di ingresso e sia
 $y^{(A)}(t)$ la corrispondente uscita.

Sia $u^{(B)}(t)$ un altro ingresso e $y^{(B)}(t)$
 la corrispondente uscita.

Se il sistema è lineare, applicando
 l'ingresso $u(t) = \alpha \cdot u^{(A)}(t) + \beta \cdot u^{(B)}(t)$
 con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ottiene l'uscita
 $y(t) = \alpha \cdot y^{(A)}(t) + \beta \cdot y^{(B)}(t)$.

Caso TC, rappr. i/s/o

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Integrando con $u = u^{(A)} \rightarrow x = x^{(A)}$
" " $u = u^{(B)} \rightarrow x = x^{(B)}$

$$\dot{x}^{(A)}(t) = A \cdot x^{(A)}(t) + B u^{(A)}(t)$$

$$\dot{x}^{(B)}(t) = A \cdot x^{(B)}(t) + B u^{(B)}(t)$$

$$\bar{x} = \alpha \cdot x^{(A)} + \beta \cdot x^{(B)}$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \alpha \cdot \dot{x}^{(A)}(t) + \beta \cdot \dot{x}^{(B)}(t) =$$

$$= \alpha \{ A \cdot x^{(A)}(t) + B u^{(A)}(t) \} + \beta \{ A \cdot x^{(B)}(t) + B u^{(B)}(t) \} =$$

$$= \alpha \cdot \underline{A x^{(A)}(t)} + \alpha \underline{B u^{(A)}(t)} + \beta \underline{A x^{(B)}(t)} + \beta \underline{B u^{(B)}(t)}$$

$$= A \{ \alpha x^{(A)}(t) + \beta x^{(B)}(t) \} + B \{ \alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t) \}$$

$$= A \cdot \bar{x}(t) + B \{ \alpha u^{(A)}(t) + \beta u^{(B)}(t) \}$$

Controesempio:

$$y(t) = u^2(t)$$

$$u^{(A)} = 1 \longrightarrow y^{(A)} = 1$$

$$u^{(B)} = (1+1) \longrightarrow y^{(B)} \neq (1+1)$$
$$y^{(B)} = 4$$

Risposta libera e forzata

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Essendo il sistema tempo-invariante, possiamo scegliere come istante iniziale $t=0$.

Sia $x(0)$ la "condizione iniziale" del sistema

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione del sistema avrà la forma

$$\underbrace{x(t)}_{\substack{\text{risposta totale} \\ \text{nello stato}}} = \underbrace{x_l(t)}_{\substack{\text{risposta libera} \\ \text{nello stato}}} + \underbrace{x_f(t)}_{\substack{\text{risposta forzata} \\ \text{nello stato}}}$$

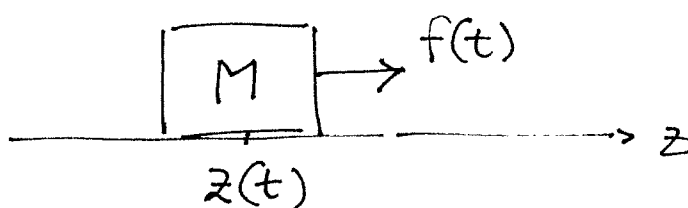
$$\underbrace{y(t)}_{\substack{\text{risposta totale} \\ \text{nell'uscita}}} = \underbrace{y_l(t)}_{\substack{\text{risposta libera} \\ \text{nell'uscita}}} + \underbrace{y_f(t)}_{\substack{\text{risposta forzata} \\ \text{nell'uscita}}}$$

dove $x_l(t)$ e $y_l(t)$ sono le soluzioni nel caso in cui $u(t) \equiv 0 \quad \forall t$, e $x_f(t)$, $y_f(t)$ sono le soluzioni nel caso in cui $x(0) = 0$.

Modellistica di sistemi meccanici

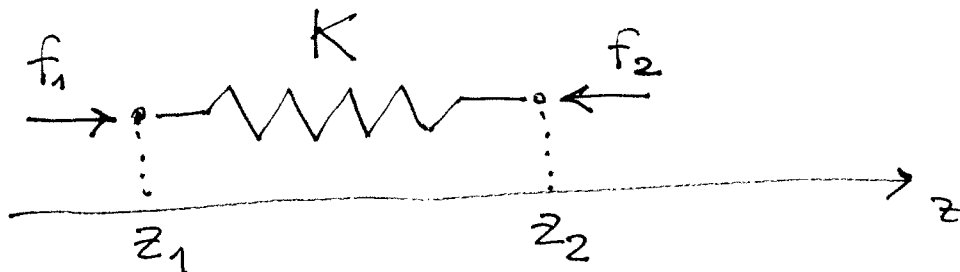
Elementi di traslazione

1. Masse



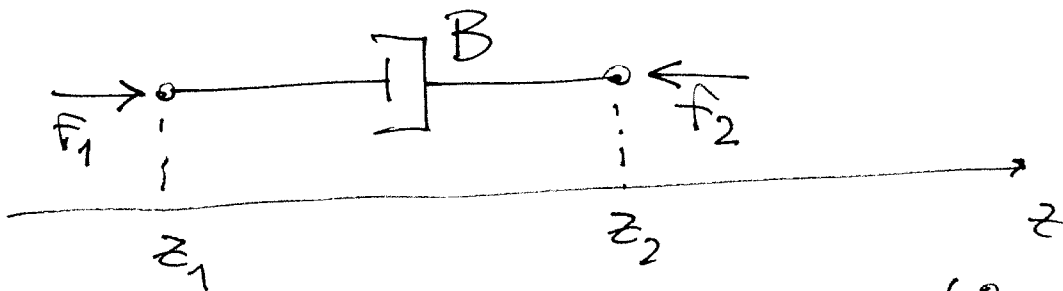
$$M \cdot \ddot{z}(t) = f(t)$$

2. Elemento elastico ("molla")



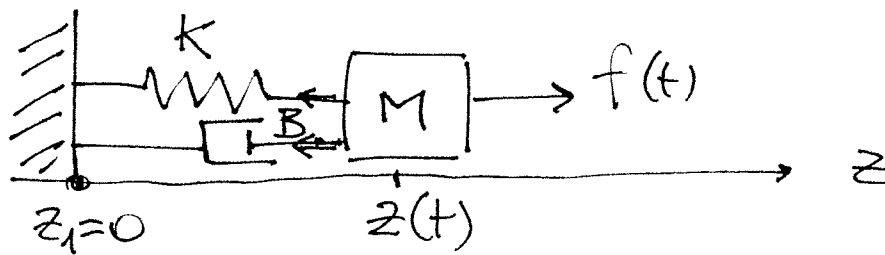
$$f_1 = K(z_2 - z_1) \quad f_2 = -K(z_2 - z_1)$$

3. Elemento dissipativo ("smorzatore")



$$f_1^{(t)} = B(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t)) \quad f_2^{(t)} = -B(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t))$$

Esempio: massa-molla-smorzatore



$$M \cdot \ddot{z}(t) = f(t) - K(z(t) - z_1) - B(\dot{z}(t) - \dot{z}_1)$$

$$M \ddot{z}(t) + B \dot{z}(t) + K z(t) = f(t)$$

Rapp. i/o

$$u(t) = f(t) \quad y(t) = z(t)$$

$$M \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) + K y(t) = u(t) \quad \text{Sistema LTI!}$$

Rapp. i/s/o

$$\text{ipotesi: } x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

obiettivo: scrivere il sistema nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) &= \frac{1}{M} f(t) - \frac{K}{M} z(t) - \frac{B}{M} \dot{z}(t) = \\ &= \frac{1}{M} u(t) - \frac{K}{M} x_1(t) - \frac{B}{M} x_2(t) \end{aligned}$$

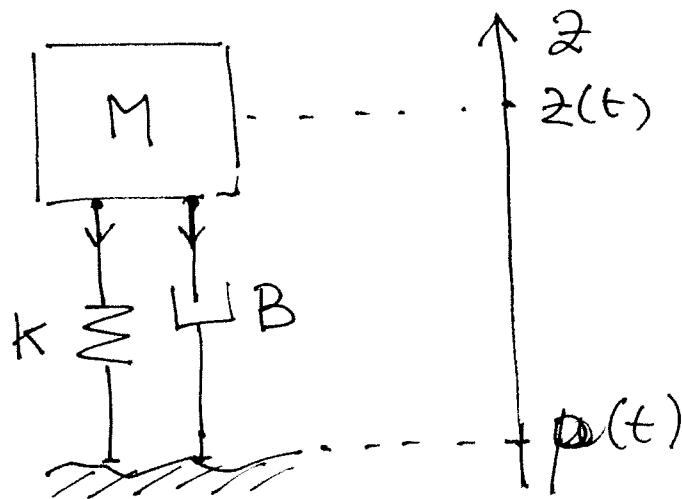
$$y(t) = z(t) = x_1(t)$$

Sistema LTI $\rightarrow$ rappresentazione matriciale

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u(t)$$

Esercizio : ammortizzatore



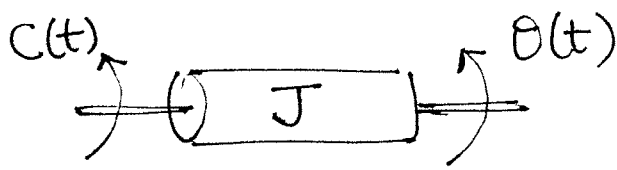
$$M \ddot{z}(t) = -Mg - K(z(t) - p(t)) - B(\dot{z}(t) - \dot{p}(t))$$

$$u(t) = \dot{p}(t) \quad y(t) = z(t) + \frac{Mg}{K}$$

Scrivere le rapp. i/o e i/s/o.

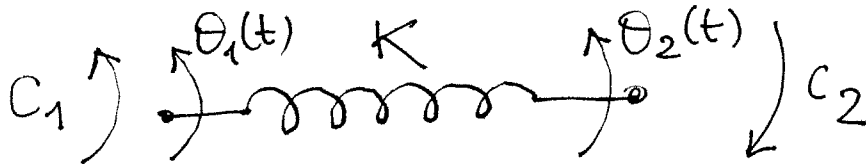
Elementi di rotazione

1. Masse in rotazione



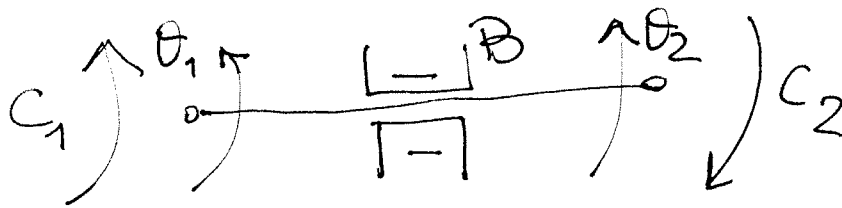
$$J \cdot \ddot{\theta}(t) = C(t)$$

2. Elemento elastico di rotazione



$$C_1(t) = K(\theta_2(t) - \theta_1(t)) \quad C_2(t) = -K(\theta_2(t) - \theta_1(t))$$

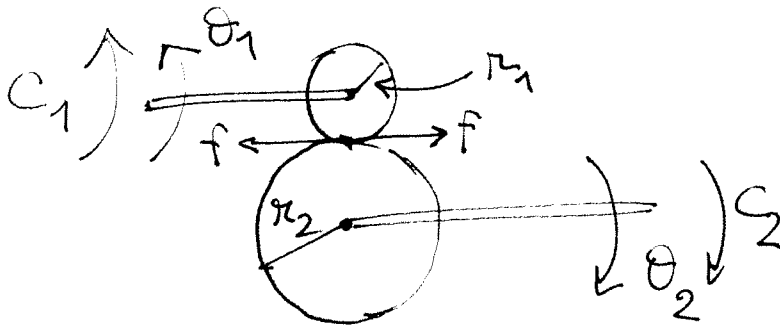
3. Elemento dissipativo di rotazione



$$C_1(t) = B(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)) \quad C_2(t) = -B(\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t))$$

Altri elementi (accoppiamenti)

1. Ingranaggi (ruote dentate)



$$C_1(t) = f(t) \cdot r_1$$

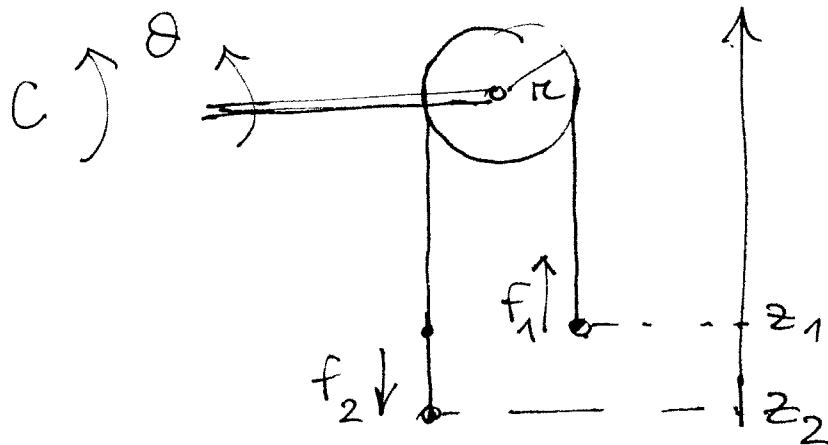
$$C_2(t) = f(t) \cdot r_2$$

$\Downarrow$

$$C_2(t) = \frac{r_2}{r_1} C_1(t)$$

$$r_1 \theta_1(t) = r_2 \theta_2(t) \Rightarrow \begin{cases} \theta_2(t) = \frac{r_1}{r_2} \theta_1(t) \end{cases}$$

2. Puleggia



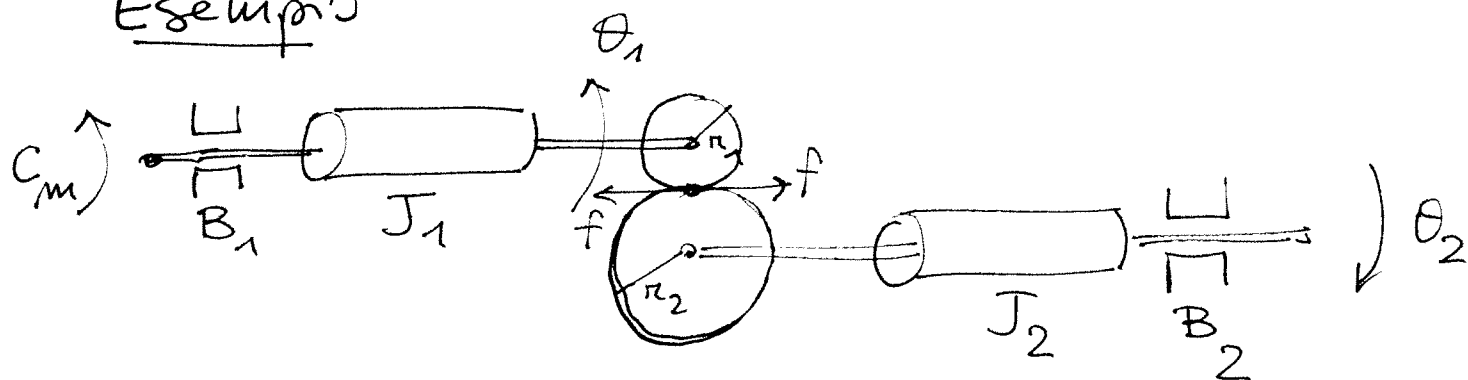
$$z_1(t) = r \theta(t)$$

$$z_2(t) = -r \theta(t)$$

$$C(t) = f_1(t) \cdot r$$

$$C(t) = -f_2(t) \cdot r$$

Esempio



$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1(t) = C_m(t) - B_1 \dot{\theta}_1(t) - r_1 f(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) = r_2 f(t) - B_2 \dot{\theta}_2(t) \\ \theta_2(t) = \frac{r_1}{r_2} \theta_1(t) \end{cases}$$

Rapp. i/o : $u(t) = C_m(t)$ $y(t) = \theta_2(t)$

$$\theta_1(t) = \underbrace{\frac{r_2}{r_1}}_{\eta} \theta_2(t)$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 \eta = C_m - B_1 \dot{\theta}_1 \eta - r_1 f \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = r_2 f - B_2 \dot{\theta}_2 \rightarrow f = \frac{J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2}{r_2} \end{cases}$$

$$J_1 \eta \ddot{\theta}_2 = C_m - B_1 \eta \dot{\theta}_2 - r_1 \left\{ \frac{J_2 \ddot{\theta}_2 + B_2 \dot{\theta}_2}{r_2} \right\}$$

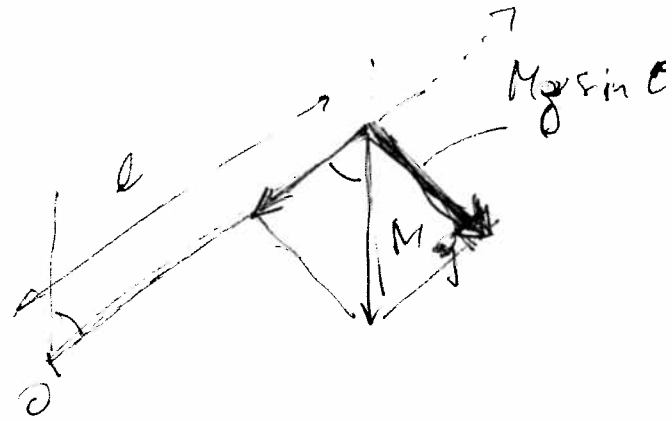
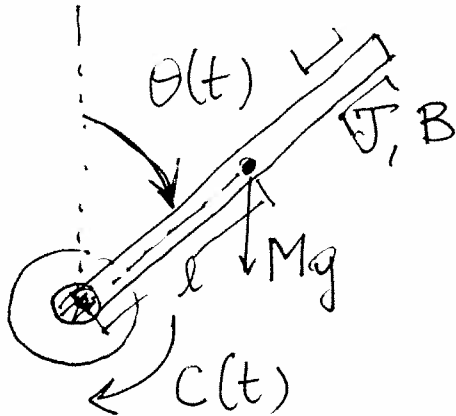
$$J_1 \eta^2 \ddot{\theta}_2 = \eta C_m - B_1 \eta^2 \dot{\theta}_2 - J_2 \ddot{\theta}_2 - B_2 \dot{\theta}_2$$

$$\underbrace{\{J_1 \eta^2 + J_2\}}_{J_T} \ddot{\theta}_2 + \underbrace{\{B_1 \eta^2 + B_2\}}_{B_T} \dot{\theta}_2 = \eta C_m$$

$$J_T \ddot{y}(t) + B_T \dot{y}(t) = \eta u(t)$$

[E]. Rappr. i/s/o.

Esempio : pendolo inverso



$$J \ddot{\theta}(t) = C(t) - B \dot{\theta}(t) + Mgl \sin \theta(t)$$

Rappr. i/o : $u(t) = C(t)$ $y(t) = \theta(t)$

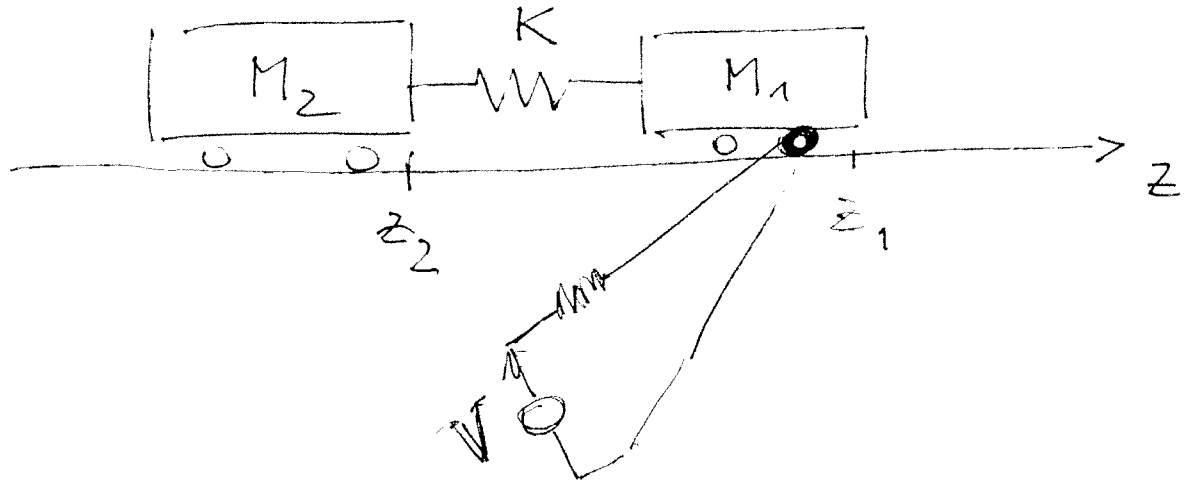
$$J \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) - Mgl \sin(y(t)) = u(t)$$

Sistema T1 non lineare !

[E]. Rappr. i/s/o.

Esercizio

B : coeff. attrito



$$M_1 \ddot{z}_1(t) = -K(z_1(t) - z_2(t)) - B\dot{z}_1(t) + f(t)$$

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = K(z_1(t) - z_2(t)) - B\dot{z}_2(t)$$

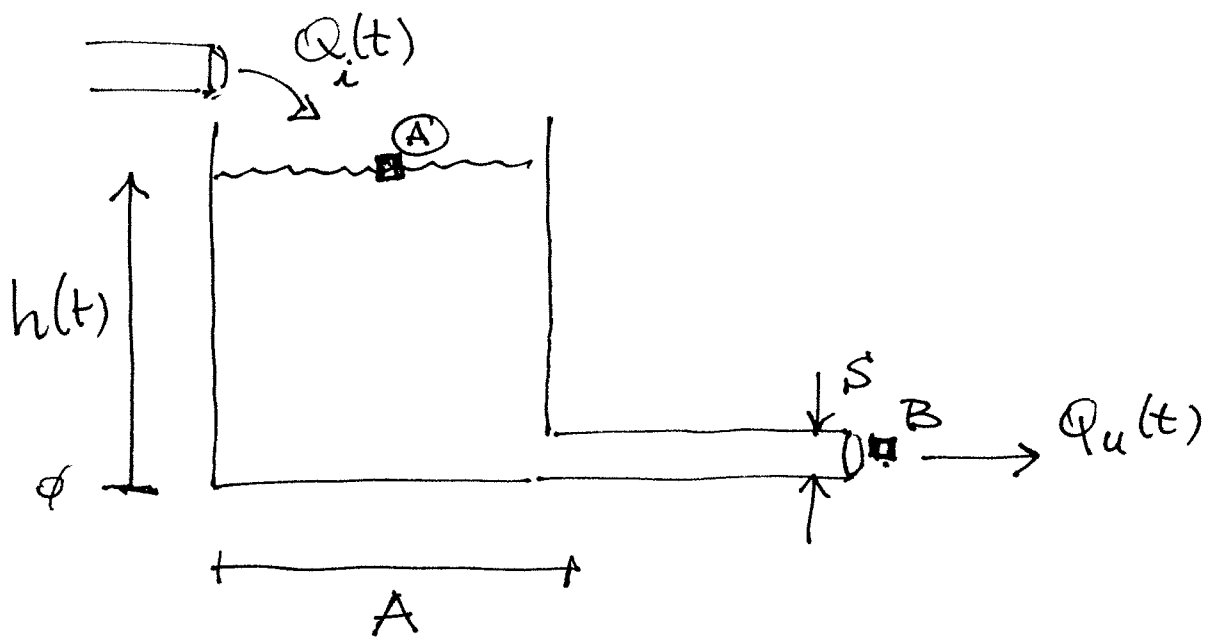
$$f(t) = \alpha \cdot V(t) - \gamma \cdot \dot{z}_1(t)$$

[E.] Determinare le rapp. i/s/o e i/o del sistema [cominciare dalla prima!]

$$\text{con } u(t) = V(t) \quad y(t) = z_2(t)$$

Modellistica di sistemi idraulici

Esempio: serbatoio



$Q_i(t)$: portata volumetrica in ingresso [m^3/s]
 $h(t)$: livello del liquido

$$\frac{d}{dt} \{A \cdot h(t)\} = Q_i(t) - Q_u(t) \quad \text{conservazione del volume}$$

conservazione dell'energia

en. potenziale + en. cinetica + pressione = costante

$$\textcircled{A} \quad \rho \cdot g \cdot h + 0 + P_{\text{atm}}$$

ρ : densità

$$\textcircled{B} \quad 0 + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_{\text{atm}}$$

v : velocità in $\textcircled{B}$

$$\int g h + P_{atm} = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_{atm}$$

$$v_B^2 = 2g \cdot h(t)$$

$$Q_u(t) = v_B(t) \cdot S$$

$$\boxed{A \cdot \dot{h}(t) = Q_i(t) - S \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}}$$

$$u(t) = Q_i(t) \quad y(t) = h(t)$$

$$A \cdot \dot{y}(t) + S \sqrt{2g y(t)} = u(t) \quad \text{rapp. i/o}$$

$$\left[\dots \text{vedere esempio con attrito non lineare} \right]$$

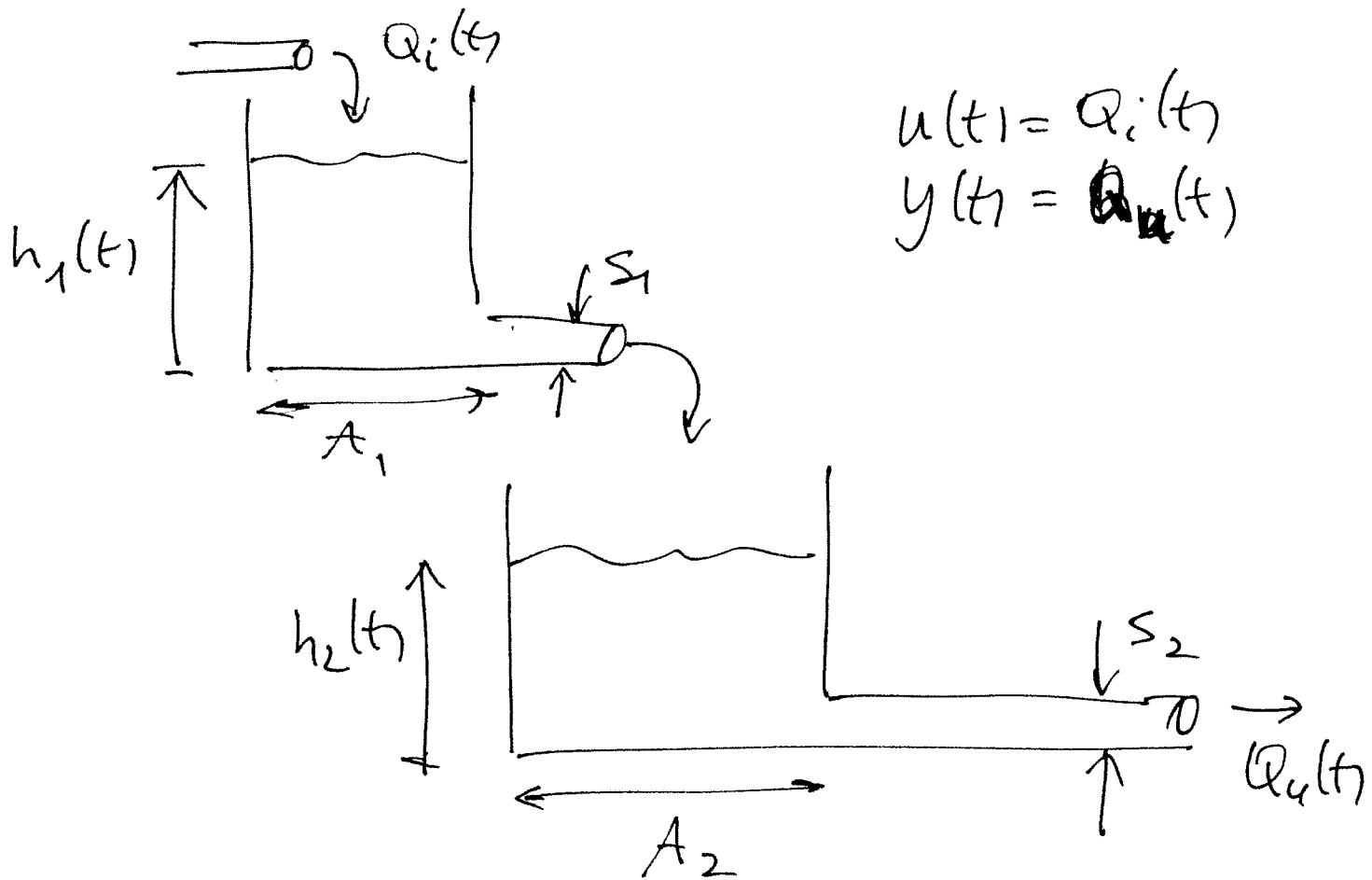
$$F(v(t), t) = -h \sqrt{v(t)}$$

$$x(t) = h(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{S}{A} \sqrt{2g x(t)} + \frac{1}{A} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

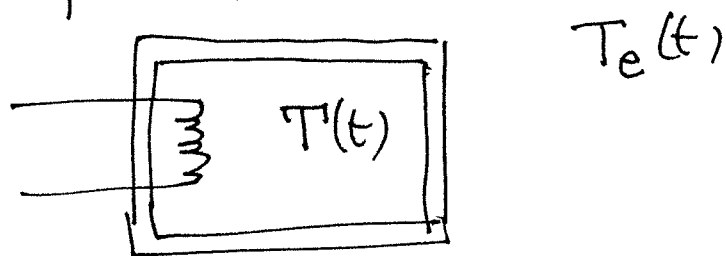
rapp. i/slo

Esercizio: Scrivere la rappresentazione
allo stato del sistema



Modellistica di sistemi termici

Esempio: forno



$T(t)$: temperatura interna @ t

$T_e(t)$: temperatura esterna @ t

$$\frac{dQ}{dt} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{capacit } \\ \text{termica}}}{C} \cdot \frac{dT}{dt}$$

$P(t)$: quantita' di calore fornita dalla resistenza nell'unit  di tempo

$$C \cdot \frac{dT(t)}{dt} = P(t) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{conduttanza} \\ \text{termica}}}{K} (T(t) - T_e(t))$$

Rapp. i/o

con $u_1(t) = P(t)$, $u_2(t) = T_e(t)$, $y(t) = T'(t)$

Semplificazione: $T_e(t) \cong \bar{T}_e$ (costante)

$$y(t) = T'(t) - \bar{T}_e$$

$$\hookrightarrow C \dot{y}(t) = u_1(t) - K \cdot y(t)$$

Esempio: forno (con temperatura delle pareti)

$T_p(t)$: temperature delle pareti @ t

C_f : Capacità termica del forno

K_f : Conduttanza termica forno $\rightarrow$ pareti

C_p : Capacità termica delle pareti

K_p : Conduttanza termica pareti $\rightarrow$ esterno

$$C_f \cdot \frac{dT(t)}{dt} = P(t) - K_f (T(t) - T_p(t))$$

$$C_p \frac{dT_p(t)}{dt} = K_f (T(t) - T_p(t)) - K_p (T_p(t) - T_e(t))$$

Rapp. i/s/o

$$X(t) = \begin{bmatrix} T(t) \\ T_p(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} P(t) \\ T_e(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = T(t)$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{K_f}{C_f} & \frac{K_f}{C_f} \\ \frac{K_f}{C_p} & -\frac{K_f + K_p}{C_p} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_f} & \emptyset \\ 0 & \frac{K_p}{C_p} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Modelli di trasferimento di risorse

Definizione: modelli in cui gli stati rappresentano la quantità di "risorsa" contenuta in un certo "compartimento".

Esempio: Modelli a classi di età

$X_i(k)$: numero di individui di età compresa tra $(i-1)T$ e iT anni, nel periodo k -esimo
(es.: $T=1$ anno, k : anno solare)

S_i : tasso di sopravvivenza classe X_i

f_i : tasso di fertilità classe X_i

$$X_i(k+1) = S_{i-1} \cdot X_{i-1}(k) \quad i=2, \dots, \overset{\uparrow}{N-1} \text{ \# di classi}$$

$$X_N(k+1) = S_{N-1} X_{N-1}(k) + S_N X_N(k)$$

$$X_1(k+1) = f_1 X_1(k) + f_2 X_2(k) + \dots + f_N X_N(k)$$

Rappr. v/s/o (c'è solo lo stato!)

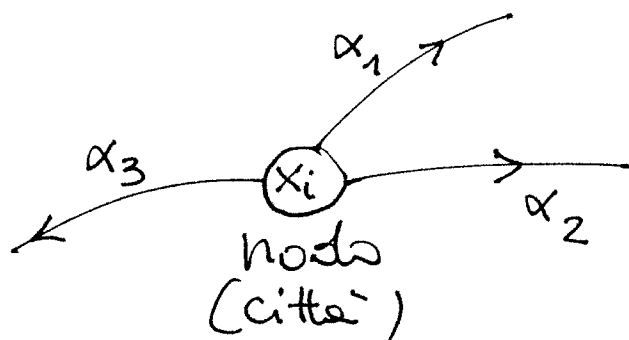
$$X(k+1) = A \cdot X(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & - & - & - & - & f_N \\ s_1 & 0 & - & - & - & - & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & - & - & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & - & - & - & 0 & s_{N-1} \\ & & & & & & s_N \end{bmatrix}$$

Esempio: modello del traffico automobilistico

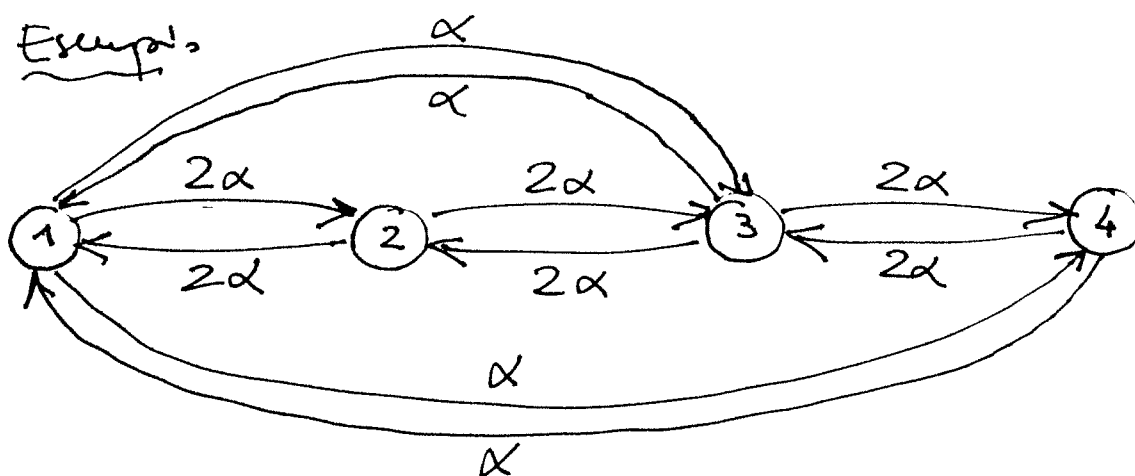
$x_i(t)$: quantità di autoveicoli nella città i -esima all'istante $t \in \mathbb{R}$

Ipotesi: il flusso di automobili in uscita dalla città i -esima è proporzionale a $x_i(t)$



$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_1 x_i(t) - \alpha_2 x_i(t) - \alpha_3 x_i(t)$$

Esempio:



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & -2\alpha x_1(t) - \alpha x_1(t) - \alpha x_1(t) + 2\alpha x_2(t) \\ & + \alpha x_3(t) + \alpha x_4(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2(t) = -2\alpha x_2(t) - 2\alpha x_2(t) + 2\alpha x_1(t) + 2\alpha x_3(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) = & -2\alpha x_3(t) - \alpha x_3(t) - 2\alpha x_3(t) + 2\alpha x_2(t) \\ & + 2\alpha x_4(t) + \alpha x_1(t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4(t) = -2\alpha x_4(t) - \alpha x_4(t) + 2\alpha x_3(t) + \alpha x_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4\alpha & 2\alpha & \alpha & \alpha \\ 2\alpha & -4\alpha & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & -5\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 0 & 2\alpha & -3\alpha \end{bmatrix} x(t) =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t)$$

Osservazioni

1. Se $x(0) = N \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = x(0) \quad \forall t \geq 0$
2. E' ancora vero se si interrompe il collegamento $1 \rightarrow 2$?
3. Cosa succede per $x(0)$ generico ?
4. Verificare che

$$\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) + \dot{x}_4(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\forall x(0)$$

Esempio: partita doppia

Attività

$x_1(t)$: Cassa

$x_2(t)$: valore merci in magazzino

Passività

$x_3(t)$: debito

$x_4(t)$: capitale versato

$x_5(t)$: riserve di utili

Vincolo (bilancio dello stato patrimoniale):

$$x_1(t) + x_2(t) = x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) \quad \forall t$$

Operazioni:

1. Versamento di capitale $u_1(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_4(t) = u_1(t)$$

2. Accensione debito $u_2(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_3(t) = u_2(t)$$

3. Acquisto merci $u_3(t)$

$$\dot{x}_1(t) = -u_3(t) \quad \dot{x}_2(t) = u_3(t)$$

4. Vendita di merci con un guadagno $\alpha(\%)$ e incasso $u_4(t)$

$$\dot{x}_1(t) = u_4(t) \quad \dot{x}_5(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_4(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{1+\alpha} u_4(t)$$

modello complessivo :

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) + u_4(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_3(t) - \frac{1}{1+\alpha} u_4(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = u_2(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = u_1(t)$$

$$\dot{x}_5(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} u_4(t)$$

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1+\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Osservazioni:

1. Se $x_1(0) + x_2(0) = x_3(0) + x_4(0) + x_5(0)$,
allora $x_1(t) + x_2(t) = x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) \quad \forall t \geq 0$
qualunque sia l'ingresso $u(t)$!
2. Può essere modellato come un sistema
ma a tempo discreto sostituendo a
 $\dot{x}_i(t) \longrightarrow x_i(k+1) - x_i(k), \quad k \in \mathbb{N}$

Modelli di transizione tra stati

Definizione: modelli in cui gli stati rappresentano la probabilità delle presenze (o assenze) di attributi o qualità, oppure di trovarsi in una certa condizione.

Esempio: Page Rank

N pagine web

probabilità di passare dalla pag. i alla pag. j

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n_i} & \text{se } \exists \text{ link da } i \text{ a } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

n_i = numero di link nella pagina i

$x_i(k)$: probabilità di trovarsi nella pagina i all'istante k

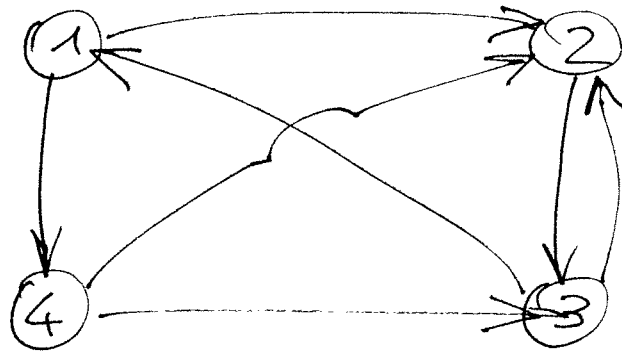
$$x_i(k+1) = p_{1i} x_1(k) + p_{2i} x_2(k) + \dots + p_{Ni} x_N(k)$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N p_{ji} x_j(k) \quad i=1 \dots N$$

$$x(k+1) = A \cdot x(k)$$

$$A_{ij} = \begin{cases} p_{ji} & \text{se } j \neq i \\ 0 & \text{se } j = i \end{cases}$$

Esercizio



$$x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) + \frac{1}{2} x_3(k) + \frac{1}{2} x_4(k)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k) + \frac{1}{2} x_4(k)$$

$$x_4(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k x(0) = \begin{pmatrix} 4/21 \\ 7/21 \\ 8/21 \\ 2/21 \end{pmatrix}$$

$$\forall x(0) : \sum_{i=1}^N x_i(0) = 1$$

$$x(k+1) = Ax(k)$$

$$x(1) = Ax(0)$$

$$x(2) = Ax(1) = A \cdot A \cdot x(0) = A^2 x(0)$$

$$x(3) = Ax(2) = A \cdot A^2 \cdot x(0) = A^3 x(0)$$

$\vdots$

$$x(k) = A^k x(0) \quad \dots \text{ n'importe quelle!}$$

Modelli di influenza

Definizione: modelli che esprimono relazioni causa-effetto tra le variabili del sistema

Esempio: modello macroeconomico [Samuelson]

$Y(k)$: prodotto interno lordo k : anno

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k)$$

$\uparrow$ consumi $\uparrow$ investimenti delle imprese $\uparrow$ spesa pubblica

$$C(k+1) = \underbrace{C_0}_{\text{parte fissa}} + \underbrace{c}_{\substack{\uparrow \text{propensione marginale} \\ \text{al consumo}}} \cdot Y(k)$$

$$I(k+1) = \underbrace{I_0}_{\text{parte fissa}} + \underbrace{a}_{\uparrow \text{acceleratore}} \cdot (C(k+1) - C(k))$$

Modello i/s/o

$$x(k) = \begin{bmatrix} C(k) \\ I(k) \end{bmatrix} \quad u(k) = \begin{bmatrix} G(k) \\ C_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad y(k) = Y(k)$$

$$C(k+1) = C_\phi + c \cdot \{G(k) + I(k) + G(k)\}$$

$$I(k+1) = I_\phi + a \left\{ C_\phi + c [G(k) + I(k) + G(k)] - C(k) \right\}$$

↓

$$x_1(k+1) = c \cdot x_1(k) + c x_2(k) + c u_1(k) + u_2(k)$$

$$x_2(k+1) = (ac - a) x_1(k) + ac x_2(k) + ac u_1(k) + a \cdot u_2(k) + u_3(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u_1(k)$$

Modello semplificato (SISO)

$$x_1(k) = C(k) - C_\phi$$

$$u_1(k) = G(k) + C_\phi + I_\phi$$

$$x_2(k) = I(k) - I_\phi$$

$$y(k) = \bar{Y}(k)$$

$$\underbrace{C(k+1) - C_\phi}_{x_1(k+1)} = c \cdot \left\{ \underbrace{C(k) - C_\phi}_{x_1(k)} + \underbrace{I(k) - I_\phi}_{x_2(k)} + \underbrace{G(k) + C_\phi + I_\phi}_{u(k)} \right\}$$

$$\underbrace{I(k+1) - I_\phi}_{x_2(k+1)} = a \left\{ c \left[\underbrace{C(k) - C_\phi}_{x_1(k)} + \underbrace{I(k) - I_\phi}_{x_2(k)} + \underbrace{G(k) + C_\phi + I_\phi}_{u(k)} \right] - \underbrace{(C(k) - C_\phi)}_{x_1(k)} \right\}$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} c & c \\ ac-a & ac \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Simulazione

Sia $c = 0,2$ e $u(k) = 500 \quad \forall k = 1, 2, \dots, 30$

Vedere come evolve il PLL $y(k)$, per

- (a) $\lambda = 3$
- (b) $\lambda = 5$
- (c) $\lambda = 6$