Sistemi Dinamici: Esercitazione 4

Esercizio 1. Un sistema dinamico lineare a tempo continuo è descritto dallo schema a blocchi rappresentato in Figura 1

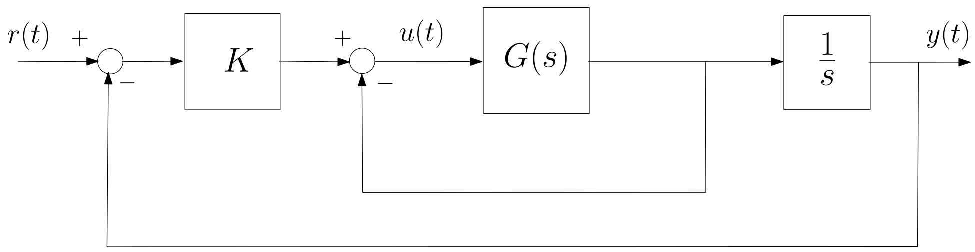

Figura 1.

dove

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 5s + 4}$$

e K è una costante reale.

I) Determinare l'insieme dei valori di $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema risulta essere stabile in senso ILUL, dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$.

II) Assumendo $K = \frac{12}{5}$, tracciare i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $W(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$. Oltre al diagramma effettivo, riportare quello asintotico, evidenziando punti di rottura e pendenze.

III) Assumendo $K = \frac{12}{5}$, determinare l'intervallo dei valori di $\omega \in \mathbb{R}$ per cui l'ampiezza della risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa al segnale di ingresso $r(t) = \cos(\omega t)$ risulta maggiore di $\frac{1}{10}$.

IV) Supponendo di applicare l'ingresso a gradino unitario $r(t) = 1(t)$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il valore asintotico del segnale $u(t)$ in Figura 1, $\lim_{t\to+\infty} u(t)$, esiste finito e riportarne il valore.

V) Determinare se esistono valori di $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema ha solo modi aperiodici convergenti, illustrando il metodo adottato.

Esercizio 2. Un sistema dinamico lineare a tempo discreto con tre stati e due ingressi è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + x_3(k) + u_1(k) \\
x_2(k+1) &= x_2(k) + u_2(k) \\
x_3(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k)
\end{aligned}$$

I) Determinare il numero minimo di passi dopo i quali il sistema risulta essere completamente raggiungibile.

II) Supponendo di poter utilizzare uno solo dei due ingressi, determinare i sottospazi raggiungibili $\mathcal{X}^{u_1}$ e $\mathcal{X}^{u_2}$ relativi rispettivamente ai casi in cui si utilizzi solo l'ingresso $u_1(k)$ o solo l'ingresso $u_2(k)$.

III) Determinare le sequenze di ingressi di lunghezza minima necessarie per poter raggiungere lo stato $\bar{x} = [1\ 2\ 3]'$, partendo dallo stato iniziale $x(0) = 0$, nei casi in cui:

a) sia possibile utilizzare entrambi gli ingressi $u_1(k)$ e $u_2(k)$;

b) sia possibile utilizzare il solo ingresso $u_2(k)$.

IV) Utilizzando entrambi gli ingressi, determinare tutte le sequenze $u_1(k)$, $u_2(k)$, per $k = 0, 1$, in grado di portare a zero lo stato all'istante $k = 2$, partendo dalle condizioni iniziali $x(0) = [0\ \ 1\ \ -1]'$. Tra le sequenze trovate determinare quella a minima energia, ovvero quella che rende minima la quantità $\|u(0)\|^2 + \|u(1)\|^2$.

V) Utilizzando il solo ingresso $u_2(k)$, determinare un controllore dead-beat in retroazione dello stato, ovvero una legge di controllo del tipo $u(k) = Fx(k)$ tale per cui la risposta libera del sistema risultante diventa nulla in tempo finito per qualunque condizione iniziale. Verificare il risultato per la condizione iniziale $x(0) = [1\ 1\ 1]'$.

Esercizio 3. Un sistema a tempo discreto che descrive il comportamento di due oscillatori accoppiati è definito dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) \\
x_2(k+1) &= -x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + u(k) \\
x_3(k+1) &= x_3(k) + x_4(k) \\
x_4(k+1) &= x_1(k) - 2x_3(k) + x_4(k)
\end{aligned}
$$

I) Determinare i modi del sistema e studiarne la stabilità.

II) Determinare la matrice F della legge di controllo in retroazione dello stato $u(k) = Fx(k)$, in modo tale che il sistema risultante abbia modi $1(k)$, $(-1)^k \cdot 1(k)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cdot 1(k)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cdot 1(k)$.

III) Determinare il numero minimo di passi necessari a raggiungere lo stato $\bar{x} = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]'$ a partire dallo stato iniziale nullo $x(0) = 0$. Calcolare la corrispondente sequenza di ingresso.

IV) Si vuole determinare il minor numero di passi N, tale per cui la sequenza di ingressi $u(0)$, $u(1)$, $\ldots$, $u(N-1)$ che consente di raggiungere lo stato $\bar{x} = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0]'$ a partire dallo stato iniziale nullo $x(0) = 0$, abbia energia inferiore a 0.2, ovvero

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) < 0.2.$$

Scrivere un programma software che risolve tale problema e riportare il numero di passi N così ottenuto.