

Sistemi Dinamici: Esercitazione 3

Esercizio 1. In un casinò, una delle attrazioni si basa sul gioco delle tre carte: lo scommettitore deve indovinare dove si trova una carta, scegliendone una fra tre coperte, disposte casualmente (in media, quindi, un terzo dei giocatori indovina e due terzi sbagliano). Più specificamente, si tratta di un gioco a turni in cui, pagata una quota di iscrizione fissa (pari ad α), ciascun giocatore continua a giocare finché non indovina consecutivamente due volte (e allora riceve il premio), o sbaglia consecutivamente due volte (e allora viene eliminato dal gioco).

1. Si costruisca un modello lineare ingresso-stato-uscita tempo discreto, che metta in relazione il numero di giocatori che ad ogni turno inizia a giocare ($u(t)$), con il numero di quelli che vincono la scommessa e incassano il premio ($y(t)$). Si considerino come variabili di stato il numero di giocatori che hanno indovinato una volta ed il numero di giocatori che hanno sbagliato una volta.
2. Determinare un modello ingresso-uscita, a partire dal modello calcolato al punto precedente.
3. Supponendo che il casinò voglia trattenere per sé (e quindi non ridistribuire come premio) il 50% degli incassi forniti dalle quote di iscrizione, determinare (in funzione di α) l'entità del premio che deve essere erogato in caso di vittoria supponendo che ad ogni turno inizi a giocare sempre lo stesso numero di giocatori e che sia trascorso un numero elevato di turni dall'inizio del gioco.

Esercizio 2. Un sistema lineare a tempo discreto, con ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$, è descritto dalla equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - u(k-2).$$

- (I) Determinare le matrici A , B , C , D di una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema.
- (II) Determinare la risposta libera $y_l(k)$ relativa alle condizioni iniziali $y(-1) = 1$, $y(-2) = 0$.
- (III) Determinare se possibile un segnale di ingresso $u(k)$ tale per cui la relativa risposta forzata $y_f(k)$ risulti essere identica alla risposta libera ottenuta al punto (II), ad ogni istante $k \geq 0$.
- (IV) Determinare la risposta forzata $y_f(k)$ relativa al segnale di ingresso $u(k) = k \cdot 1(k)$, e calcolare il valore di regime $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_f(k)$.
- (V) Supponendo di applicare ad ogni istante $k \geq 0$ un segnale ingresso tale che $u(k) = y(k)$, si determinino i modi della risposta libera del sistema risultante.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \frac{3}{2}x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\x_2(k+1) &= -x_1(k) - x_2(k) + 2u(k) \\y(k) &= x_1(k) + u(k)\end{aligned}$$

(I) Determinare la risposta libera nell'uscita $y_l(k)$ relativa alle condizioni iniziali:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

(II) Determinare la risposta impulsiva nell'uscita $y_{imp}(k)$.

(III) Assumendo ora

$$u(k) = -\frac{1}{6}x_1(k) \quad \forall k \geq 0 ,$$

determinare i modi del sistema autonomo risultante da questa particolare scelta di $u(k)$.

Calcolare inoltre per quali condizioni iniziali $x(0)$ non nulle, la risposta libera nell'uscita $y_l(k)$ di tale sistema risulti essere identicamente nulla per ogni $k \geq 1$.