

Sistemi Dinamici: Esercitazione 1

Esercizio 1. Il sistema meccanico descritto in Figura 1 è composto da due masse identiche M collegate tra loro da una molla di costante elastica K . Si indichino con $x_1(t)$ e $x_2(t)$ le posizioni delle masse, e sia $F(t)$ una forza applicata dall'esterno alla seconda massa. Si assumano i valori: $M = 1$ kg, $K = 2$ N/m.

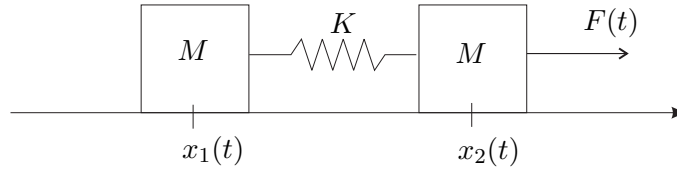


Figura 1.

1. Determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema. Calcolare le matrici A , B , C , D , assumendo come ingresso $u(t) = F(t)$ e come uscita $y(t) = x_1(t)$.
2. Utilizzando la trasformata di Laplace, determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema e calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$.
3. Determinare i modi della risposta libera del sistema e stabilire se sono:
 - aperiodici o pseudoperiodici;
 - convergenti, limitati non convergenti o divergenti.
4. Calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t)$.
5. Determinare un segnale di ingresso $u(t)$ costituito dalla combinazione lineare di modi del tipo $t^k e^{-t}$, $k = 0, 1, \dots$, in modo tale che la corrispondente risposta forzata del sistema sia limitata.

Esercizio 2. Un lampadario appeso ad un soffitto mediante un cavo può essere assimilato ad un corpo in rotazione avente momento di inerzia J , costante elastica di torsione K e coefficiente di attrito viscoso β . Si supponga di far ruotare il lampadario attorno al proprio asse applicando una coppia $\tau(t)$, e sia $\theta(t)$ l'angolo di cui il lampadario risulta ruotato rispetto alla posizione di riposo all'istante t .

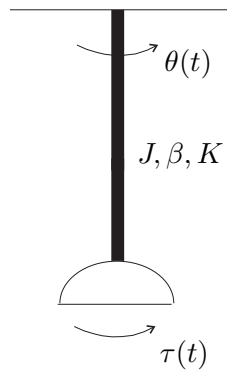


Figura 1.

Si assumano i valori $J = 2 \text{ kg m}^2$, $K = 3 \text{ Nm/rad}$, e si supponga $\beta \geq 0$.

1. Assumendo come ingresso $u(t) = \tau(t)$ e come uscita $y(t) = \theta(t)$, determinare una rappresentazione ingresso-uscita del sistema. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Determinare per quali valori di β i modi della risposta impulsiva del sistema risultano essere convergenti, e per quali valori di β sono invece limitati ma non convergenti.
3. Determinare per quali valori di β , i modi della risposta impulsiva risultano essere del tipo $e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$, con α , ω e ϕ costanti reali, e $\alpha < -1$.
4. Assumendo $\beta = 5$, determinare la risposta forzata $y_f(t)$ relativa all'ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -4x_2 - 2x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Determinare i modi della risposta libera del sistema.
3. Determinare per quali valori della condizione iniziale $x(0)$ la risposta libera nell'uscita $y_l(t)$ converge a zero per $t \rightarrow +\infty$.
4. Determinare la risposta forzata nell'uscita relativa all'ingresso a gradino unitario $u(t) = 1(t)$.