Sistemi Dinamici

Elaborato 7: esercizi riassuntivi sulla seconda parte del corso

Problema 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in Figura 1

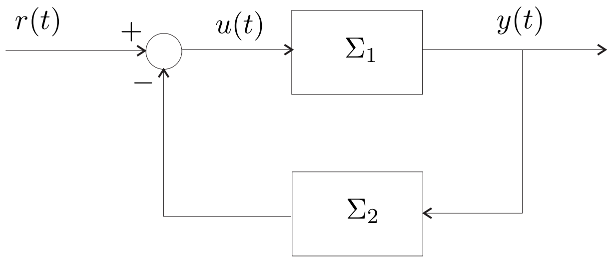

Figura 1

in cui Σ_1 è descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\Sigma_1 \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) & = & -x_1(t) + x_2(t) \end{array} \right.$$

1. Assumendo $\Sigma_2 = 0$, calcolare la risposta forzata $y_f(t)$ del sistema, relativa all'ingresso a gradino $r(t) = 1$, $t \geq 0$.

2. Determinare la funzione di trasferimento $C(s)$ del sistema Σ_2, in modo che la risposta forzata $y_f(t)$, relativa all'ingresso impulsivo $r(t) = \delta(t)$, sia pari a $y_f(t) = 4e^{-t} - 3e^{-\frac{1}{2}t}$.

3. Assumendo $\Sigma_2 = K$, con K costante reale, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema in retroazione con ingresso $r(t)$ e uscita $y(t)$, è stabile in senso ILUL.

4. Assumendo $\Sigma_2 = K$, con $K = 1$, tracciare i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$.

Problema 2. Si consideri il sistema dinamico tempo continuo

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & 2\varepsilon x_1(t) x_2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & \frac{1}{\varepsilon} x_1(t) - x_2(t) \end{array}$$

dove ε è un parametro reale.

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di ε.

2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio calcolati al punto 1.

3. Determinare il valore di ε in modo tale che il sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio $x_1 = x_2 = 0$, abbia modi $e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$, $e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$.

Problema 3. Si consideri il sistema tempo-discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t) + \alpha x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3(t+1) &= \frac{1}{2}x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

dove α è un parametro reale.

1. Assumendo $\alpha = 0$, determinare la risposta libera nello stato $x_l(t)$, relativa alle condizioni iniziali $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$.
2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, la risposta forzata nell'uscita $y_f(t)$, relativa all'ingresso a gradino unitario, è limitata.
3. Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 4. È dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + u(t) \\ x_3(t+1) &= x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_3(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
2. Calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso impulsivo
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}.$$
3. Determinare un segnale d'ingresso $u(t)$ limitato, tale che la corrispondente risposta forzata $y_f(t)$ risulti non limitata. Discutere la stabilità del sistema, sia nello spazio degli stati sia in senso ILUL.
4. Determinare l'insieme degli stati raggiungibili. Il sistema è completamente raggiungibile?
5. Determinare il numero minimo di passi in cui è possibile raggiungere lo stato $\bar{x} = (3 \;\; 1 \;\; 1)'$ a partire dallo stato iniziale nullo, e quale è la corrispondente sequenza d'ingresso.
6. Ripetere l'esercizio al punto precedente, supponendo che lo stato iniziale sia $x(0) = (0 \;\; 2 \;\; 2)'$.
7. Determinare una decomposizione di raggiungibilità del sistema. Calcolare gli autovalori raggiungibili e quelli non raggiungibili. Il sistema è stabilizzabile?
8. Determinare l'insieme degli stati non osservabili del sistema. Il sistema è completamente osservabile?
9. Determinare una decomposizione di osservabilità del sistema. Calcolare gli autovalori osservabili e quelli non osservabili. Il sistema è rivelabile?

Problema 5. È dato il sistema lineare tempo-discreto descritto dallo schema a blocchi in Figura 2.

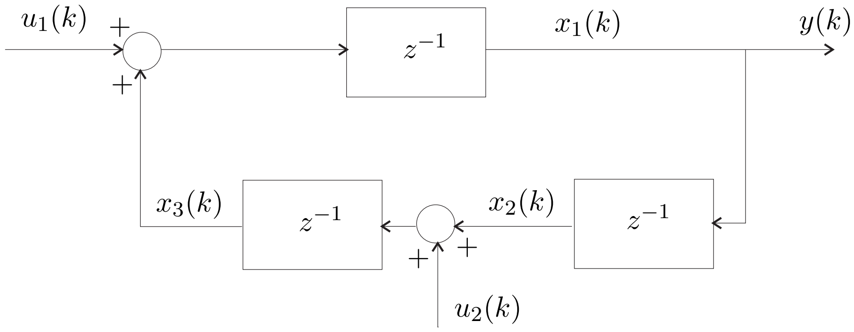

Figura 2

1. Determinare le matrici A, B, C, D della rappresentazione di stato Σ del sistema, che si ottiene assumendo come vettore di ingresso $u(k) = [u_1(k) \quad u_2(k)]'$, come uscita $y(k)$ e come stato $x(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k)]'$.

2. Studiare le proprietà di stabilità di Σ.

3. È Σ completamente raggiungibile? Se sì, qual è il minimo numero di passi in cui un qualunque stato può essere raggiunto a partire dallo stato nullo?

4. Determinare l'insieme degli stati che possono essere raggiunti dallo stato nullo in 1, 2 e 3 passi agendo solamente su $u_1(k)$ (supponendo cioè che $u_1(k)$ sia l'unico ingresso del sistema).

5. Supponendo ancora che $u_1(k)$ sia l'unico ingresso, determinare se possibile una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1(k) = F_1 x(k)$, tale per cui tutti gli autovalori del sistema ad anello chiuso risultante siano in $z = 0$.

6. Verificare che, controllando il sistema come al punto precedente, lo stato evolve verso lo stato zero in al più 3 passi, qualunque sia la condizione iniziale. Quali stati iniziali vengono portati a zero in 1, 2 e 3 passi rispettivamente?

7. È possibile rispondere alle domande 3, 4, 5, 6 mediante una semplice ispezione dello schema a blocchi proposto?

Problema 6. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle equazioni ingresso-stato-uscita

$$\Sigma_1 \ : \ \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -10x_1(t) - 12x_2(t) - 3x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x_1(t) + 10x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema e tracciarne i diagrammi di Bode.

2. Determinare se il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile.

3. Determinare la matrice F della legge di retroazione dello stato $u(t) = Fx(t)$, in modo che i modi del sistema ad anello chiuso risultante siano e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}.

4. Determinare la matrice L di un osservatore asintotico dello stato $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$, in modo che la dinamica dell'errore di stima dello stato sia combinazione lineare dei modi e^{-4t}, e^{-5t}, e^{-6t}.