Sistemi Dinamici

Elaborato 6: proprietà strutturali, raggiungibilità, osservabilità

Problema 1. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & u(k) \\ x_2(k+1) & = & \alpha x_1(k) + x_3(k) \\ x_3(k+1) & = & \beta x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

dove α e β sono parametri reali.

1. Determinare per quali valori di α e β il sistema è completamente raggiungibile.
2. Assumendo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, determinare lo spazio degli stati raggiungibili e gli autovalori raggiungibili. Stabilire inoltre se il sistema può essere stabilizzato asintoticamente mediante una legge di controllo in retroazione dallo stato.
3. Assumendo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, determinare il minor numero di passi in cui è possibile raggiungere lo stato $x_f = (10 \;\; 2 \;\; -2)'$ a partire dallo stato iniziale nullo, e quale è la corrispondente sequenza di ingresso.
4. Assumendo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, determinare tutte le sequenze di ingresso in grado di portare a zero lo stato in tre passi, ovvero $x(3) = (0 \;\; 0 \;\; 0)'$, a partire dallo stato iniziale $x(0) = (4 \;\; 0 \;\; 0)'$.

Problema 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & 2x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) & = & x_2(k) \\ x_3(k+1) & = & u(k) \end{cases}$$

1. Determinare se il sistema è completamente raggiungibile. Calcolare l'insieme degli stati raggiungibili.
2. Determinare il minor numero di passi necessari per raggiungere lo stato $\bar{x} = (2 \;\; 0 \;\; 1)'$ a partire dallo stato iniziale nullo, e la corrispondente sequenza di ingresso.
3. Determinare il minor numero di passi necessari per raggiungere lo stato nullo a partire dallo stato iniziale $x(0) = (1 \;\; 0 \;\; 0)'$, e la corrispondente sequenza di ingresso.
4. Determinare una decomposizione di raggiungibilità del sistema. Determinare se il sistema è stabilizzabile.

Problema 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) & = & x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) & = & -x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) & = & 2x_1(k) \end{cases}$$

con condizione iniziale $x(0) = (1 \;\; 0)'$.

1. Determinare la sequenza di ingresso tale che $x(2) = (0 \;\; 1)'$.
2. Determinare l'insieme delle sequenza di ingresso tali per cui si abbia $x(3) = (0 \;\; 1)'$ e calcolare tra queste quella che minimizza l'energia dell'ingresso $\sum_{k=0}^{2} u^2(k)$.

3. Determinare la matrice F della legge di retroazione dello stato $u(k) = Fx(k)$, in modo che i modi del sistema ad anello chiuso risultante siano $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$.
4. Determinare il sottospazio degli stati non osservabili.
5. Determinare una decomposizione di osservabilità del sistema. Determinare se il sistema è rivelabile.
6. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

Problema 4. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_2(k) + x_3(k) \\ x_2(k+1) &= 2x_1(k) + 2u(k) \\ x_3(k+1) &= 2x_3(k) \\ y(k) &= x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

con condizione iniziale $x(0) = (0 \;\; 1 \;\; 1)'$.

1. Si consideri il vettore di stato $\bar{x} = (1 \;\; 0 \;\; 10)'$. Determinare, se possibile, la sequenza di ingresso che consente di raggiungere lo stato $\bar{x}$, partendo da $x(0)$, nel numero minimo di passi.
2. Ripetere l'esercizio al punto precedente per $\bar{x} = (1 \;\; 0 \;\; 16)'$.
3. Determinare se il sistema è completamente osservabile.
4. Calcolare la matrice L di un osservatore asintotico dello stato $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$, in modo che l'errore di stima dello stato converga a zero in un tempo finito.