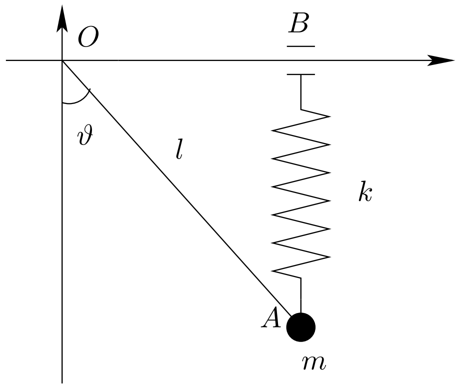
Sistemi Dinamici

Elaborato 5: linearizzazione, stabilità

Problema 1. Si consideri il sistema meccanico in figura costituito da un pendolo formato da un filo di massa trascurabile lungo l e da un punto materiale di massa m. Il pendolo è incernierato nel punto O ed è attaccato all'estremità A ad una molla di costante k che mantiene sempre la posizione verticale poiché l'estremità B può slittare sull'asse orizzontale. Sul sistema agisce l'accelerazione di gravità g.



1. Determinare una rappresentazione (non lineare) del sistema assumendo come variabili di stato la posizione angolare del pendolo e la sua velocità angolare.

2. Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

3. Determinare i sistemi linearizzati nell'intorno di ciascuna delle posizioni di equilibrio precedentemente trovate.

4. Per ciascuno dei sistemi linearizzati, si determinino quali condizioni devono soddisfare i parametri del sistema affinché i modi risultino puramente oscillanti.

Problema 2. Per i seguenti sistemi dinamici, determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ (ove presente):

$$\text{a)} \quad \left\{ \dot{x}(t) = \cos x(t) + \frac{2}{\pi} x(t) + u(t) \qquad \text{per } u(t) = -1, \ \forall\, t \geq 0 \right.$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_1(t) + x_1^2(t) x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_1^2(t) x_2(t) \end{cases} \qquad \text{per } u(t) = 1, \ \forall\, t \geq 0$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -\alpha^2 x_1(k) + 2\alpha x_2(k) \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - \alpha x_2(k) \end{cases} \qquad \text{per } u(k) = 1, \ \forall\, k \geq 0$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{x_1^2(k) x_2(k) - x_1^2(k) - x_2(k) - 2x_1(k) + 2}{x_1(k) - 2} \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) x_2(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Problema 3. È dato il sistema lineare tempo continuo

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

in cui α e β sono parametri reali.

1. Determinare per quali valori di α e β il sistema è rispettivamente asintoticamente stabile, stabile, instabile.

2. Determinare per quali valori di α e β il sistema è stabile in senso ingresso limitato uscita limitata (BIBO).

3. Se esistono valori di α e β per cui il sistema risulta stabile BIBO ma non asintoticamente stabile, determinare se la risposta all'impulso nello stato per condizioni iniziali nulle ha o meno componenti illimitate.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dallo schema a blocchi in Figura 1, dove K è una costante reale.

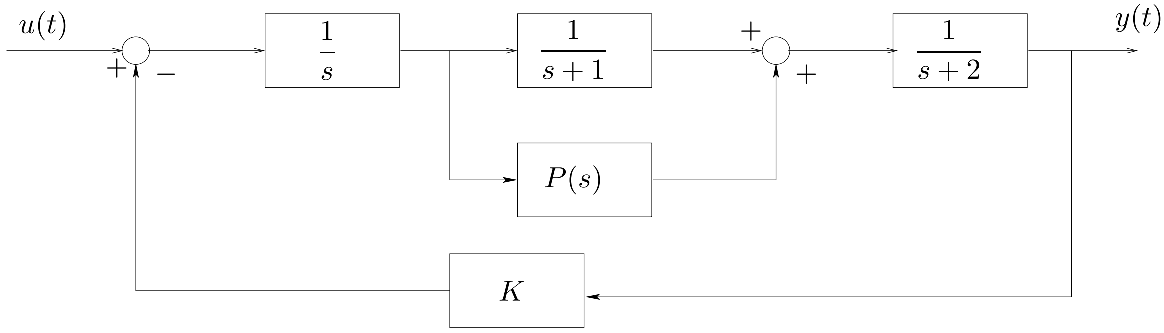


Figura 1

1. Assumendo $P(s) = \dfrac{s+2}{s+3}$, determinare per quali valori di $K \in \mathbb{R}$, il sistema risulta essere BIBO stabile dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$.

2. Ripetere l'esercizio al punto precedente, assumendo $P(s) = \dfrac{2}{s+3}$.